

# Suites numériques

Z, auctore

4 octobre 2005

## 1 Suites arithmétiques

**Définition.** Une suite de nombres  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *arithmétique* lorsqu'il existe un nombre  $r$  tel que pour tout entier  $n$  on ait

$$u_{n+1} = u_n + r. \quad (1)$$

Ce nombre  $r$  est appelé la *raison* de la suite.

**Relations entre les termes.** La suite  $(u_n)_n$  est arithmétique de raison  $r$ . Alors on a

a) pour tout entier  $n$

$$u_n = u_0 + n \times r \quad (2)$$

b) pour tous entiers  $k \leq n$

$$u_n = u_k + (n - k) \times r. \quad (3)$$

**Somme des termes successifs.** Avec  $(u_n)_n$  arithmétique de raison  $r$ , alors on a

a) à partir du premier terme  $u_0$  jusqu'au rang  $n$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \quad (4)$$

b) à partir d'un terme de rang  $k$  jusqu'au rang  $n \geq k$

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_n = (n - k + 1) \times \frac{u_k + u_n}{2} \quad (5)$$

**Deux résultats remarquables.**

- La somme des  $n$  premiers entiers consécutifs

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2} \quad (6)$$

- Trois nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite arithmétique si, et seulement si

$$b = \frac{a + c}{2} \quad (7)$$

## 2 Suites géométriques

**Définition.** Une suite de nombres  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *géométrique* lorsqu'il existe un nombre  $q$  tel que pour tout entier  $n$  on ait

$$v_{n+1} = v_n \times q. \quad (8)$$

Ce nombre  $q$  est appelé la *raison* de la suite.

**Relations entre les termes.** La suite  $(v_n)_n$  est arithmétique de raison  $q$ . Alors on a

- a) pour tout entier  $n$

$$v_n = v_0 \times q^n \quad (9)$$

- b) pour tous entiers  $k \leq n$

$$v_n = v_k \times q^{n-k}. \quad (10)$$

**Somme des termes successifs.** Avec  $(v_n)_n$  géométrique de raison  $q$ , alors

- a) à partir du premier terme  $v_0$  jusqu'au rang  $n$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (11)$$

- b) à partir d'un terme de rang  $k$  jusqu'au rang  $n \geq k$

$$v_k + v_{k+1} + v_{k+2} + \cdots + v_n = v_k \times \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q} \quad (12)$$

**Deux résultats remarquables.**

- La somme des  $n$  premières puissances successives de  $q$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (13)$$

- Trois nombres **positifs**  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont dans cet ordre des termes successifs d'une suite géométrique si, et seulement si

$$b = \sqrt{a \times c} \quad (14)$$

**Limite.** Lorsque la raison  $q$  d'une suite géométrique  $(v_n)$  est telle que

$$-1 < q < 1 \quad (15)$$

alors les valeurs  $v_n$  de la suite se rapprochent indéfiniment de 0 lorsque  $n$  devient grand : la suite  $(v_n)$  tend vers 0.

### 3 Généralités

**Monotonie.** Une suite  $(u_n)$  est *croissante* lorsque, pour tout entier  $n$  on a

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

Elle est *strictement croissante* lorsque l'inégalité est stricte.

La suite  $(u_n)$  est *décroissante* si pour tout  $n$  on a

$$u_n \geq u_{n+1}.$$

La suite  $(u_n)$  est *constante* lorsque pour tout  $n$  on a

$$u_n = u_{n+1}.$$

**Bornes.** Une suite  $(u_n)$  est *majorée* par  $M$  lorsque pour tout entier  $n$

$$u_n \leq M.$$

La suite  $(u_n)$  est *minorée* par  $m$  lorsque pour tout entier  $n$ , on a

$$u_n \geq m.$$

La suite  $(u_n)$  est *bornée* par  $m$  et  $M$  lorsque pour tout entier  $n$ , on a

$$m \leq u_n \leq M.$$

**Convergence.** Une suite  $(u_n)$  a pour limite un nombre  $\ell$  lorsque les nombres  $u_n$  se rapprochent indéfiniment de  $\ell$  pour des entiers  $n$  de plus en plus grands.

On dit alors que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , ou encore qu'elle est *convergente*, de limite  $\ell$ . Ceci se note par le symbole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

De façon plus formelle, ceci se traduit par le fait que pour toute précision  $\varepsilon > 0$  fixée, il existe un rang  $N$  tel que, pour tout  $n$

$$n \geq N \implies -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon. \quad (16)$$

Voici un théorème d'usage fréquent pour s'assurer de l'*existence* d'une limite pour une suite donnée.

**Propriété 1** *Si une suite  $(u_n)$  est croissante et est majorée par un nombre  $M$ , alors elle converge et sa limite est inférieure à  $M$ .*

Un énoncé similaire peut être formulé, concernant une suite minorée et décroissante.

Voici un autre théorème important.

**Propriété 2** *Si trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont telles que pour tout  $n$*

$$u_n < v_n < w_n,$$

*et si de plus*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n,$$

*alors on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

C'est un théorème d'encadrement de limites.

**Suites adjacentes.** Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites *adjacentes* lorsque les trois conditions suivantes sont réunies

- $(u_n)$  est croissante,
- $(v_n)$  est décroissante,
- pour tout  $n$ , on a  $u_n \leq v_n$ .

Alors si de plus la différence  $u_n - v_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors les deux suites sont convergentes et ont la même limite.

## 4 Suites récurrentes

**Définition.** Ce sont les suites définies par la donnée de leur premier terme  $u_0$  et par une relation de récurrence, valable pour tout entier  $n$

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites définies par relation de récurrence.

**Variation.** Le sens de variation de la fonction  $f$  peut donner des renseignements sur celui de la suite.

**Propriété 3** *Si la fonction  $f$  est **croissante**, alors*

- si  $u_0 \leq u_1$ , la suite  $(u_n)$  est croissante ;
- si  $u_0 \geq u_1$  la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Par contre, dans le cas où la fonction  $f$  est **décroissante**, on peut seulement dire que la suite des termes  $(u_{2n})$  de rang pair est monotone, celle des termes  $(u_{2n+1})$  de rang impair est monotone elle-aussi, mais leur sens de variation sont opposés.

**Limite éventuelle.** Si une suite récurrente telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$  possède une limite  $l$ , alors cette limite  $l$  est nécessairement solution de l'équation

$$f(x) = x. \tag{17}$$

Ceci fournit un moyen de calcul de limite, à condition de savoir si la suite est convergente.