

Dérivation des fonctions numériques

Z, auctore

6 décembre 2005

1 Définition

Pour une fonction f définie sur un intervalle I contenant une valeur x_0 , si le taux de variation de f entre x et x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

possède une limite finie a lorsque x tend vers x_0 , alors on dit que

- la fonction f est **dérivable** en x_0 ,
- le **nombre dérivé** de f en x_0 est a . On le note $f'(x_0) = a$.

On retiendra la définition

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

valable lorsque cette limite *existe*. En introduisant la différence $h = x - x_0$, cette définition s'écrit

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2 Interprétation géométrique

Le nombre dérivé en x_0 d'une fonction f , dérivable en x_0 , est égal au **coefficient directeur de la tangente** (\mathcal{D}) à la courbe représentative de f en x_0 . Avec $f'(x_0) = a$, l'équation de (\mathcal{D}) est donnée par

$$y = a(x - x_0) + f(x_0).$$

Une fonction f n'est pas dérivable en x_0 lorsque sa courbe représentative admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

3 Dérivées usuelles

Fonctions affines. Soit $f : x \mapsto ax + b$. Alors, pour tout x , f est dérivable et on a

$$f'(x) = a.$$

En particulier, la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x$ est $f'(x) = 1$ pour tout x .

Fonctions puissances. Deux cas particuliers avant le cas général.

– Soit $f : x \mapsto x^2$. Alors, pour tout x , f est dérivable et on a

$$f'(x) = 2x.$$

– Soit $f : x \mapsto x^3$. Alors, pour tout x , f est dérivable et on a

$$f'(x) = 3x^2.$$

– Soit $f : x \mapsto x^n$ avec $n \geq 1$. Alors, pour tout x , f est dérivable et on a

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Fonction inverse. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors, pour tout $x \neq 0$, f est dérivable et on a

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

Fonctions puissances bis. Où l'on considère les inverses des puissances.

– Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Alors pour tout $x \neq 0$, f est dérivable et on a

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}.$$

– Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$. Alors pour tout $x \neq 0$, f est dérivable et on a

$$f'(x) = \frac{-3}{x^4}.$$

– Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$, pour $n \geq 1$. Alors pour tout $x \neq 0$, f est dérivable et on a

$$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Fonction racine carrée. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors, pour tout $x > 0$, f est dérivable et on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Fonctions trigonométriques.

– La fonction $f : x \mapsto \cos x$ est dérivable pour tout x , et on a

$$f'(x) = -\sin x.$$

– La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est dérivable pour tout x , et on a

$$f'(x) = \cos x.$$

– La fonction $f : x \mapsto \tan x$ est dérivable pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, et on a

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Opérations et dérivées. Soient f et g deux fonctions dérivables en $x \in I$. Alors

– la somme $f + g$ est dérivable en x et on a

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

– le produit fg est dérivable en x et on a

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

– si de plus $g(x) \neq 0$, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Composition avec une fonction affine. Soit $u : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Soit f une fonction dérivable en $y_0 = ax_0 + b$. Alors, la fonction composée $g : x \mapsto f \circ u$ est dérivable en x_0 et on a

$$g'(x_0) = a \times f'(ax_0 + b).$$

4 Usage de la dérivée

On a vu que le nombre dérivée donne la pente des tangentes à la courbe représentative de la fonction.

Il est bien connu que le signe de la dérivée de f donne le sens de variation de celle-ci.

Les valeurs en lesquelles s'annulent la dérivée d'une fonction indiquent des **extrema éventuels** : si $f'(x_0) = 0$, alors en x_0 la fonction f peut posséder un maximum ou un minimum local. De façon précise, pour que la fonction f possède un extremum en x_0 , il est nécessaire que l'on ait $f'(x_0) = 0$.

Le nombre dérivé fournit aussi des **approximations affines**. . . Par exemple

- pour de « petites » valeurs de x autour de 0 et pour $n \geq 1$ on a

$$(1+x)^n \simeq 1+nx$$

- pour de « petites » valeurs de x autour de 0, on a

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$$

- pour de petites valeurs de x autour de 0, on a

$$\sin x \simeq x.$$