Systèmes de deux équations à deux inconnues

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -x+2y=4 \end{array}\right.$$

Ce système est constitué de deux équations simultanées et deux inconnues x et y .

Méthodes algébriques de résolution :

Résoudre le système, c'est trouver toutes les solutions communes aux deux équations, c'est-à-dire trouver les couples $(x\,;\,y)$ pour lesquels les deux égalités sont vraies simultanément. Le principe général consiste à éliminer une inconnue pour se ramener à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

Par substitution

- On isole une des deux inconnues dans une des équations.
- On la remplace (substitue) par son expression dans l'autre équation.
- On détermine la valeur d'une des inconnues.
- On remplace celle-ci par sa valeur dans la première expression.
- On détermine la valeur de la seconde inconnue.

Exemple :

$$.\left\{\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -3x+2y=4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \qquad \text{on a isolé } y \\ -3x+2y=4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \\ -3x+2(2x-1)=4 \quad \text{on a remplacé } y \text{ par sa valeur} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \\ -3x+4x-2=4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \\ x=6 \qquad \text{on a trouvé x} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2\times 6-1 \quad \text{on a trouvé y} \\ x=6 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 11 \\ x = 6 \end{cases}$$

La solution est le couple $(6\,;\,11)$

Vérification

$2 \times 6 - 11$ est bien égal à 1
$(-3) \times 6 + 2 \times 11$ est bien égal à 4

*
* *

Par combinaison linéaire
• On multiplie les équations par des nombres choisis de manière à obtenir les coefficients égaux (ou opposés) dans chacune des deux équations pour une des deux inconnues.
• On soustrait (ou additionne) membre à membre les deux équations du système afin d'obtenir une équation à une seule inconnue.
• On détermine alors cette inconnue en résolvant cette équation.
• On détermine ensuite l'autre inconnue en reportant la valeur de la première inconnue dans une des équations de départ.

Exemple 1 :

$$.\begin{cases} 5x + 11y = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5x + 11y = 1 & \text{on multiplie cette équation par } 2 \\ 2x + 3y = 6 & \text{on multiplie cette équation par } 5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 10x + 22y = 2 & \text{on soustrait la première équation à la deuxième} \\ 10x + 15y = 30 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrcrcr} & 10\text{x} & + & 22\text{y} & = & 2 \\ - & 10\text{x} & + & 15\text{y} & = & 30 \\ \hline & & & 7\text{y} & = & -28 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-28}{7} & \text{on élimine ainsi les } x \text{ et on trouve } y \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ 2x + 3 \times (-4) = 6 & \text{on remplace } y \text{ par sa valeur} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ 2x = 18 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -4 \end{cases}$$

La solution est le couple $(9\,;\,-4)$

Vérification

$5 \times 9 - 11 \times 4$ est bien égal à 1

$2 \times 9 - 3 \times 4$ est bien égal à 6

Exemple 2 :

$$\begin{cases} 6x - 5y = 6 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x - 5y = 6 \\ -3x + 2y = -5 & \text{on multiplie cette équation par 2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x - 5y = 6 & \text{on ajoute la première équation à la deuxième} \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrcrcl} & 6x & - & 5y & = & 6 \\ + & -6x & + & 4y & = & -10 \\ \hline & & & -y & = & -4 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -y = -4 & \text{on élimine ainsi les } x \text{ et on trouve } y \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ -3x + 2 \times 4 = -5 & \text{on remplace } y \text{ par sa valeur} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ -3x = -13 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = 4 \end{cases}$$

La solution est le couple $(\frac{13}{3};4)$

Vérification

$6 \times \frac{13}{3} - 5 \times 4$ est bien égal à 6

$(-3)\times\frac{13}{3}+2\times 4$ est bien égal à -5

Remarque
Lorsque l'un des coefficients est égal à 1 ou -1 on préfère prendre la méthode par substitution car elle simplifie les calculs mais dans le cas général c'est la méthode par combinaison qu'il faut utiliser.

Méthode et interprétation graphique :

Exemple :

$$\text{Résoudre graphiquement le système} \begin{cases} 2x-y=1 & (1) \\ -x+2y=4 & (2) \end{cases}$$

Le principe consiste à associer aux deux équations (1) et (2) les deux équations de droites suivantes :

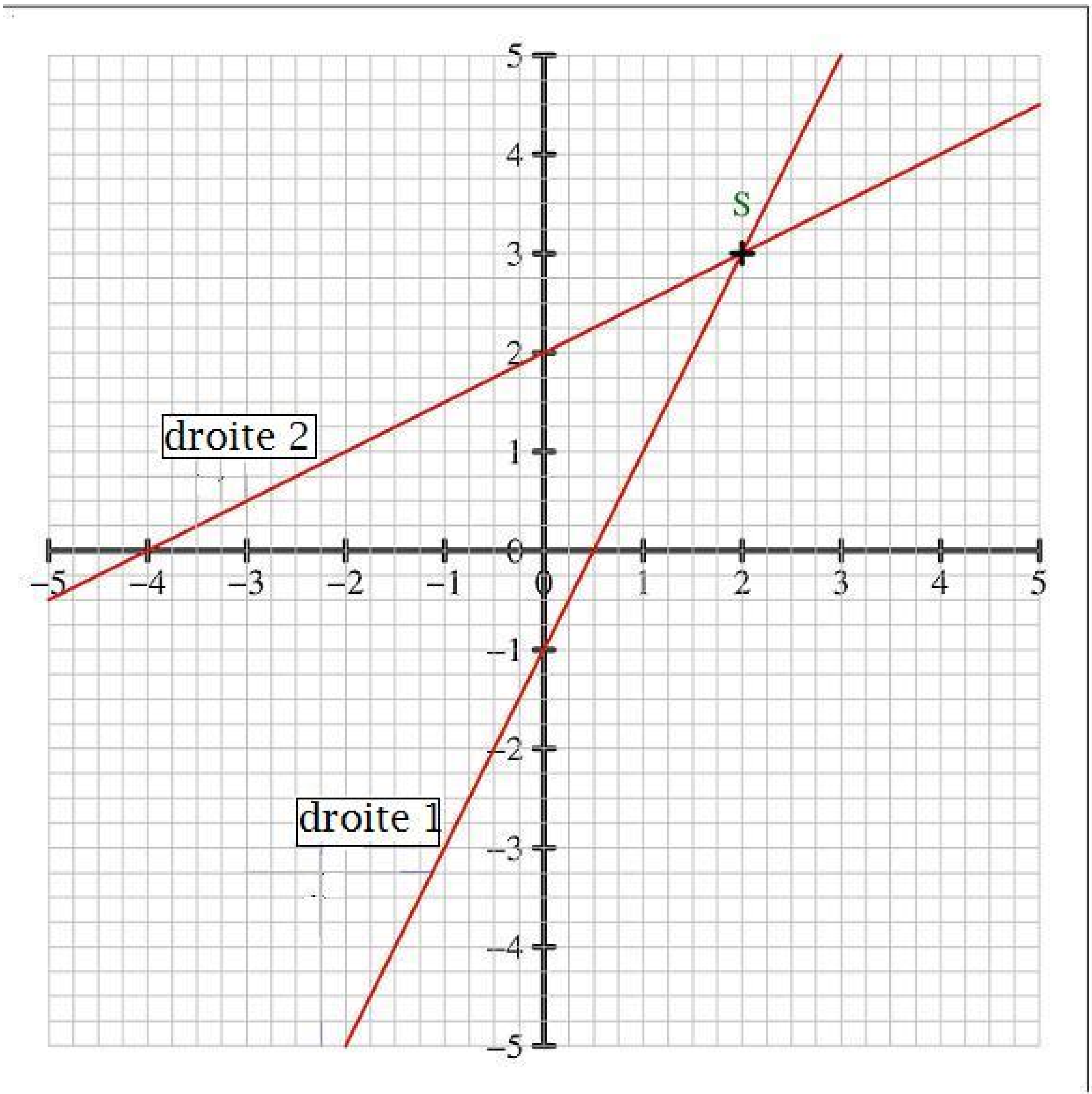
$y=2x-1$ et $y=\frac{1}{2}x+2$

Les deux droites sont sécantes car les coefficients directeurs ne sont pas égaux ($2\neq\frac{-1}{2}$).

Graphiquement, les coordonnées **(2;3)** de **l'unique point d'intersection** S des droites (1) et (2) constituent la **solution graphique** du système.

Commentaire :

Cette détermination graphique qui est **approximative** permet :
- de contrôler des résultats obtenus par calculs
- d'anticiper l'existence ou non de solution(s)
droites (1) et (2) sécantes : **1 solution**
droites (1) et (2) strictement parallèles : **0 solutions**
droites (1) et (2) confondues : **infinité de solutions**



droite 2
droite 1
S