

Différence de deux carrés

Certaines expressions algébriques peuvent être factorisées sans pour autant présenter de facteur commun apparent : on peut le faire au moyen d'une formule (appelée *identité remarquable*).

Vocabulaire

Différence de deux carrés. C'est une expression de la forme $a^2 - b^2$.

- La **somme** de a et b est le résultat de $a + b$;
- la **différence** de a et b est le résultat de $a - b$;
- une expression est **factorisée** lorsqu'elle est écrite comme un produit, par ex. $(2x + 1)(4 - 3x)$.

Formule

Pour toutes quantités a et b , on a l'identité

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

En effet, en développant on a bien $(a - b)(a + b) = a^2 + \underbrace{ab - ba}_{=0} - b^2$.

Reformulation

On voit que $a^2 - b^2$ est factorisé en $(a - b) \times (a + b)$, c'est-à-dire :

la différence des carrés de deux nombres est égale au produit de la somme de ces nombres par leur différence.

Il est important de noter que dans la formule, la différence des carrés $a^2 - b^2$ est prise dans le même ordre que la différence des nombres $a - b$.

Exemples, applications

a. $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$.

b. $16 - (x + 3)^2 = 4^2 - (x + 3)^2 = [4 - (x + 3)][4 + (x + 3)] = (1 - x)(x + 7)$.

c. $9(x + 1)^2 - 1 = [3(x + 1)]^2 - 1^2 = [3(x + 1) - 1][3(x + 1) + 1] = 3x(3x + 5)$.

d. $(4x - 5)^2 - (2x - 3)^2 = [(4x - 5) - (2x - 3)][(4x - 5) + (2x - 3)] = (2x - 2)(6x - 8)$.

e. **Résoudre certaines équations du deuxième degré** est le principal intérêt d'une telle méthode de factorisation, puisqu'on peut ainsi leur appliquer la règle du *produit-nul*.

Par exemple, l'équation $4x^2 - 25 = 0$ est équivalente à l'équation $(2x - 5)(2x + 5) = 0$ qui admet les deux solutions : 2,5 et -2,5.

f. $(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 - n)(n + 1 + n) = 2n + 1$.

La différence entre les carrés de deux nombres entiers successifs est égale à la somme des deux nombres.

En effet, on voit d'après la factorisation précédente que

$$(n + 1)^2 - n^2 = n + (n + 1).$$

Ceci présente un intérêt pour le **calcul mental des carrés** sans multiplication : en effet, si l'on connaît $13^2 = 169$, alors $14^2 = 13^2 + 13 + 14 = 169 + 27 = 196$.