Stages intensifs

# Corrigés

# Maths

# Terminale S

Groupe Réussite

www.groupe-reussite.fr

contact@groupe-reussite.fr

# Chapitre 1

# Fonction exponentielle, logarithme népérien et logarithme décimal

## 1.1 Exercices préliminaires

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**Exercice n°1**

Déterminer la limite éventuelle de la fonction $f$ proposée en $a$ :

1. $f : x \longmapsto ln(9 - x^2)$ en $a = 3$

**1.** $\lim\limits_{x \to 3} 9 - x^2 = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} ln(X) = -\infty$, donc par composition :

$$\boxed{\lim_{x \to 3} ln(9 - x^2) = -\infty}$$

2. $f : x \longmapsto ln(1 - ln(x))$ en $a = e$

**2.** $\lim\limits_{x \to e} 1 - ln(x) = 1 - 1 = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} ln(X) = -\infty$, donc par composition :

$$\boxed{\lim_{x \to e} ln(1 - ln(x)) = -\infty}$$

3. $f : x \longmapsto x - ln(x)$ en $a = +\infty$

**3.** $x - ln(x) = x\left(1 - \frac{ln(x)}{x}\right)$ et par croissance comparée $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$, donc par somme et produit :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x - ln(x) = +\infty}$$

4. $f : x \longmapsto \frac{x^2}{ln(x)}$ en $a = 0$

**4.** Par quotient :

$$\boxed{\lim_{x \to 0,\, x > 0} \frac{x^2}{ln(x)} = 0^-}$$

**Exercice n°2**

Déterminer la dérivée de la fonction $f$ proposée :

1. $f : x \longmapsto xln(x)$

   **1.** La fonction $f : x \longmapsto xln(x)$ est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$, et $\forall x > 0$ :

$$\boxed{f'(x) = ln(x) + x\frac{1}{x} = 1 + ln(x)}$$

2. $f : x \longmapsto ln(e^x - 1)$

   **2.** La fonction $f : x \longmapsto ln(e^x - 1)$ est définie pour tout $x$ tel que $e^x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > 0$. Ainsi, $f$ est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$, en tant que fonction composée, et $\forall x > 0$ :

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}}$$

3. $f : x \longmapsto ln(|x|)$

**3.** La fonction $f : x \longmapsto ln(|x|)$ est définie, continue et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, et $\forall x \neq 0$ :

$$\boxed{\text{si } x > 0 : f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\text{si } x < 0 : f'(x) = -\frac{1}{x}}$$

### Exercice n°3

1. Justifier le résultat du cours :

$$\lim_{h \to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$$

   **1.** La fonction $f : x \longmapsto ln(1+x)$ est définie, continue et dérivable sur $]-1;+\infty[$, et nous avons en particulier :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1}$$

2. En déduire la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} xln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

**2.** $\forall x > 0$, $xln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{ln(1+u)-ln(1)}{u}$, avec $u = \frac{1}{x}$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\lim_{x \to +\infty} xln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{u \to 0} \frac{ln(1+u) - ln(1)}{u} = 1}$$

### Exercice n°4

D'après le cours : $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$.

En déduire :

1. la limite de $\frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$ quand $x$ tend vers $+\infty$

**1.** $\forall x > 0$, $\frac{ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{ln(u^2)}{u} = 2\frac{ln(u)}{u}$, avec $u = \sqrt{x}$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to+\infty} 2\frac{ln(u)}{u} = 0}$$

2. la limite de $xln(x)$ quand $x$ tend vers 0

**2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u}} = \lim\limits_{u\to 0} uln\left(\frac{1}{u}\right) = \lim\limits_{u\to 0} u\left(ln(1) - ln(u)\right) = \lim\limits_{u\to 0} -uln(u)$

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{u\to 0} uln(u) = 0}$

## 1.2 Problèmes

### Exercice n°5

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto ln(1+e^x)$$

Soit $C$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc par composition de limites :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} ln(1+e^x) = ln(1) = 0} \text{ et } \boxed{\lim_{x\to+\infty} ln(1+e^x) = +\infty}$$

2. Etudier le sens de variation de $f$ et préciser son signe.

$f$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions, et $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$$

La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$. Donc la fonction $f$ est nécessairement positive sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + f(-x)$$

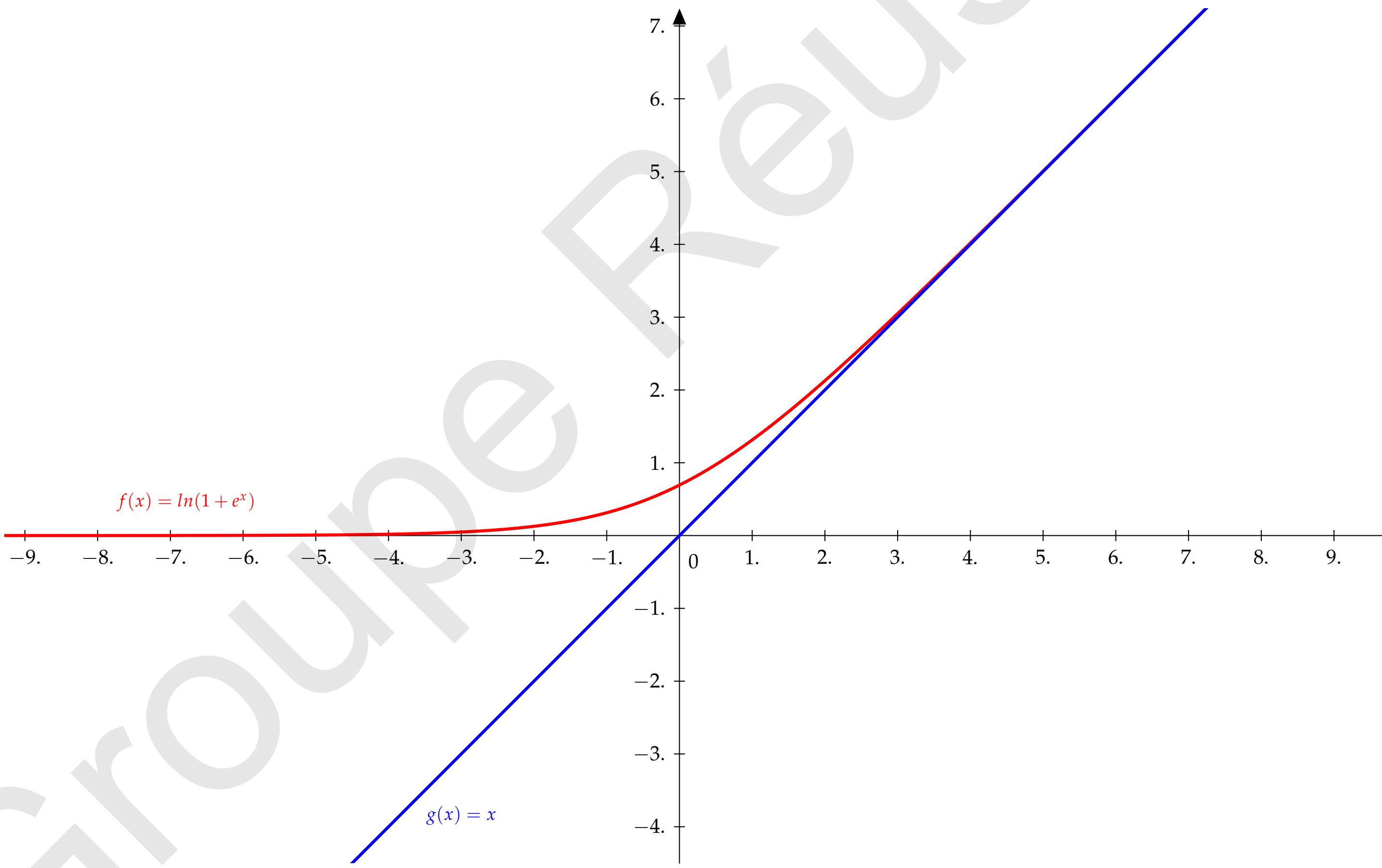
En déduire que la courbe $C$ admet en $+\infty$ une asymptote, notée $\Delta$. Préciser la position de $C$ par rapport à $\Delta$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ln(1+e^x) = ln(e^x(e^{-x}+1)) = ln(e^x) + ln(1+e^{-x}) = x + f(-x)$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

La fonction $f$ admet donc la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ pour asymptote en $+\infty$. De plus, $f$ étant positive, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = f(-x) \geq 0$. La courbe $C$ est donc au-dessus de la droite $\Delta$.

4. Tracer $\Delta$ et $C$.




### Exercice n°6

On considère la fonction $f$ définie sur $I = ]-1; +\infty[$ par :

$$f : x \longmapsto x - \frac{ln(1+x)}{1+x}$$

Soit $C$ sa courbe représentative.

**Partie A : étude de certaines propriétés de la courbe $C$**

**1.** Justifier que $f$ est dérivable sur $I = ]-1; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

La fonction $f$ admet pour valeur interdite $-1$, et la fonction $x \longmapsto ln(1+x)$ n'est définie que pour $1 + x > 0 \iff x > -1$. Ainsi, $f$ est donc bien définie, continue, et dérivable sur $I = ]-1; +\infty[$, comme somme et produit de fonctions dérivables sur $I$. Nous avons alors :

$$\forall x \in I, f'(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+x} \times \frac{1}{1+x} + ln(1+x) \times \frac{-1}{(1+x)^2}\right) = \frac{(1+x)^2 - 1 + ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

**2.** Pour tout $x$ dans $I$, on pose : $N(x) = (1+x)^2 - 1 + ln(1+x)$

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $I$. Calculer $N(0)$ et en déduire les variations de $f$.

La fonction $N$ est définie, continue et dérivable sur $I$, et $\forall x \in I$ :

$$N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x)^2 + 1}{1+x}$$

$$\forall x \in ]-1; +\infty[, 1 + x > 0 \Longrightarrow N'(x) > 0$$

La fonction $N$ est donc bien strictement croissante sur $I$. De plus, $N(0) = 1 - 1 + ln(1) = 0$. Nous pouvons donc en déduire que $N$ est négative sur $]-1; 0]$ puis positive sur $[0; +\infty[$. Or, pour tout $x \in I$ :

$$f'(x) = \frac{N(x)}{(1+x)^2}$$

$f'$ est donc négative sur $]-1; 0]$ puis positive sur $[0; +\infty[$. La fonction $f$ est donc décroissante sur $]-1; 0]$ puis croissante sur $[0; +\infty[$.

**3.** Soit $D$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $C$ et de la droite $D$.

Il nous faut ici de résoudre l'équation $f(x) = x$, avec $x \in I$ :

$$f(x) = x \iff x - \frac{ln(1+x)}{1+x} = x \iff \frac{ln(1+x)}{1+x} = 0 \iff ln(1+x) = 0 \iff x = 0$$

Ainsi, la courbe $C$ et la droite $D$ d'équation $y = x$ ont un unique point d'intersection, le point $A(0; 0)$.

Que représente ce point d'intersection pour la fonction $f$ ?

Ce point d'intersection de la courbe $C$ avec la droite linéaire $D$ est un point fixe de la fonction $f$.

**Partie B : étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction $f$**

**1.** Démontrer que si $x \in [0; 4]$ alors $f(x) \in [0; 4]$.

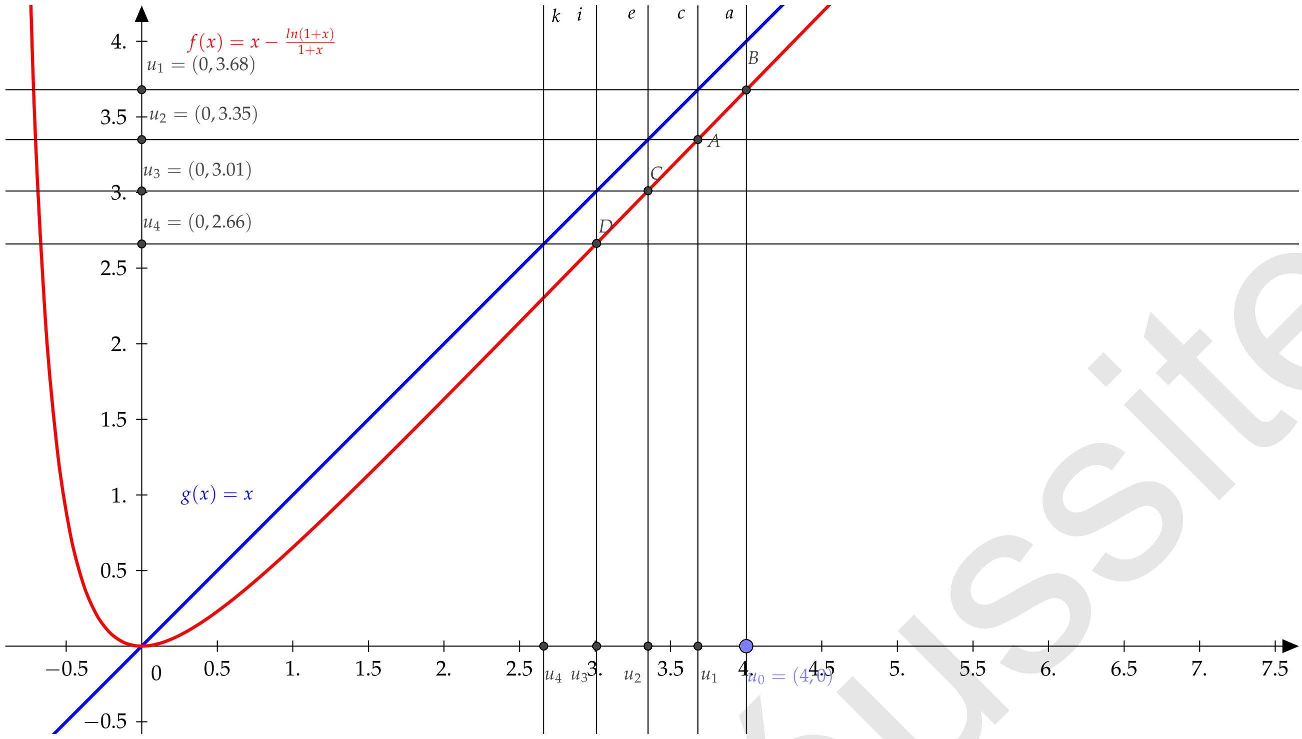
La fonction $f$ est croissante sur $[0; 4]$. Or $f(0) = 0 - \frac{ln(1)}{1} = 0$ et $f(4) = 4 - \frac{ln(5)}{5} < 4$. Ainsi, nous pouvons affirmer que :

$$\forall x \in [0; 4], 0 \leq f(x) \leq 4$$

**2.** On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

**a)** Tracer l'allure de la courbe $C$ et la droite $D$. Placer les premiers termes de la suite : $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.




**b)** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;4]$

Nous savons que : $\forall x \in [0;4]$, $f(x) \in [0;4]$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme le terme initial de la suite $u_0 = 4$, une récurrence immédiate montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;4]$$

**c)** Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

Nous voyons graphiquement que la courbe $C$ est en-dessous de la droite linéaire $D$ sur $[0;4]$. Ainsi :

$$\forall x \in [0;4], f(x) - x \leq 0$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$$

La suite $(u_n)$ est donc décroissante.

**d)** Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente. Notons $l$ sa limite. Déterminer $l$ grâce à la partie $A$.

La suite $(u_n)$ est bornée dans $[0;4]$ et décroissante. En vertu du théorème de convergence monotone, nous pouvons donc affirmer que la suite $(u_n)$ est convergente. Soit $l$ sa limite. La fonction $f$ étant continue, nous pouvons passer à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$. Nous obtenons ainsi l'équation :

$$l = f(l)$$

La limite $l$ vérifie donc une équation du point fixe sur $f$. Or nous savons que la fonction $f$ admet un unique point fixe : $A(0;0)$. Nous avons donc nécessairement :

$$\boxed{l = 0}$$

**Exercice n°7**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

On désigne par $C$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

**1. a)** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

Par quotient, $\lim_{x \to -\infty} \frac{4e^x}{e^x+3} = \frac{0}{3} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} x + 2 = -\infty$. Donc par somme de limites :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

**b)** Démontrer que la droite $D_1$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $C$.

$$\lim_{x \to -\infty} |f(x) - (x+2)| = \lim_{x \to -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 0$$

La fonction $f$ admet donc bien la droite $D_1$ d'équation $y = x + 2$ pour asymptote en $-\infty$.

**c)** Etudier la position de $C$ par rapport à $D_1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+2) = -\frac{4e^x}{e^x + 3} < 0$$

La fonction $f$ est donc en-dessous de son asymptote $D_1$.

**2. a)** Justifier que $f$ est dérivable sur $R$, et calculer sa dérivée. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

La fonction $f$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 3 > 3 > 0$). Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - 4\left(e^x \times \frac{1}{e^x + 3} + e^x \times -\frac{e^x}{(e^x+3)^2}\right) = \frac{(e^x+3)^2 - 4e^x(e^x+3) + 4e^{2x}}{(e^x+3)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^{2x} + 6e^x + 9 - 4e^{2x} - 12e^x + 4e^{2x}}{(e^x+3)^2} = \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x+3)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2}$$

**b)** Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

Grâce à la question précédente, nous savons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$. Ainsi la fonction $f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x}{e^x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{1+3e^{-x}} = 4 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

**3. a)** Que peut-on dire de la tangente $D_2$ à la courbe $C$ au point $I$ d'abscisse $ln(3)$ ?

La tangente $D_2$ à la courbe $C$ au point $I$ d'abscisse $ln(3)$ a pour équation :

$$D_2 : y = f'(ln(3))(x - ln(3)) + ln(3) = \left(\frac{3-3}{3+3}\right)^2 (x - ln(3)) + ln(3) = ln(3)$$

Ainsi, la tangente $D_2$ est une droite horizontale d'équation $y = ln(3)$.

**b)** En utilisant les variations de la fonction $f$, étudier la position de la courbe $C$ par rapport à $D_2$.

La fonction $f$ croit de $-\infty$ vers $+\infty$. On peut donc en déduire, que sur l'intervalle $]-\infty; ln(3)]$, la courbe $C$ est en-dessous de la tangente $D_2$, et que sur l'intervalle $[ln(3); +\infty[$, la courbe $C$ est au-dessus.

**4. a)** Montrer que la tangente $D_3$ à la courbe $C$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

La tangente $D_3$ à la courbe $C$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$D_3 : y = f'(0)x + f(0) = \left(\frac{1-3}{1+3}\right)^2 x + 1 = \frac{1}{4}x + 1$$

**b)** Etudier la position de la courbe $C$ par rapport à la tangente $D_3$ sur l'intervalle $]-\infty; ln(3)]$.

On pourra étudier la dérivée seconde de $f$, définie pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x+3)^3}$$

Pour étudier la position relative de la courbe $C$ par rapport à la tangente $D_3$ sur l'intervalle $]-\infty, ln(3)]$, il nous faut étudier le signe de la différence $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + 1\right)$. Notons $g(x)$ cette nouvelle expression. La fonction $g$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x$ :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{4}$$

$$g''(x) = f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x+3)^3}$$

Sur $]-\infty; ln(3)]$, $e^x - 3 \leq 0$. Ainsi, $\forall x \leq ln(3), g''(x) = f''(x) \leq 0$.

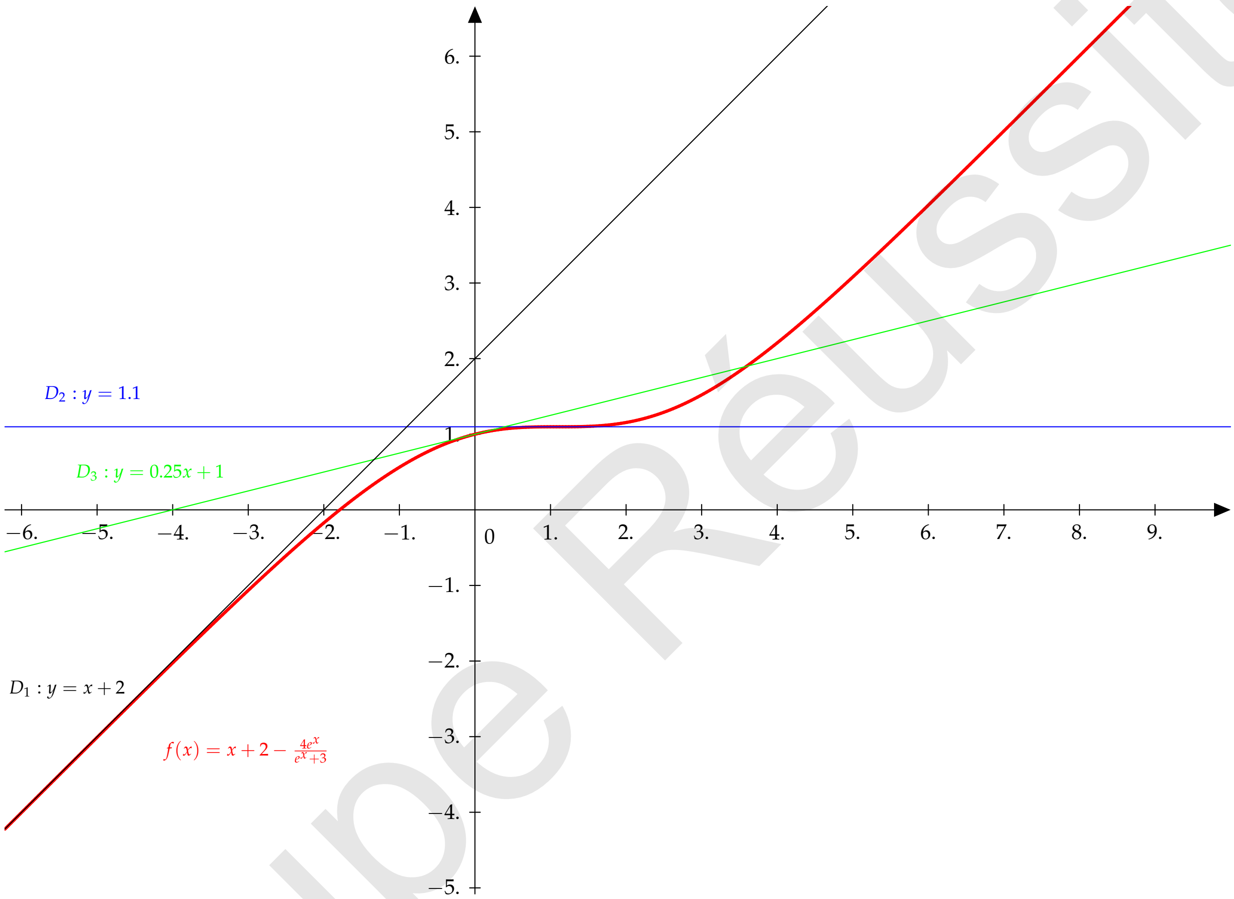
La fonction $g'$ est donc décroissante sur $]-\infty; ln(3)]$. Or, $g'(0) = f'(0) - \frac{1}{4} = 0$. La fonction $g'$ est donc positive sur $]-\infty, 0]$ puis négative sur $[0; ln(3)]$.

On en déduit donc que la fonction $g$ est croissante sur $]-\infty,0]$ puis décroissante sur $[0;ln(3)]$. Elle admet donc un maximum en $x=0$. Or, $g(0)=f(0)-1=0$. Nous pouvons donc affirmer que :

$$\forall x \in ]-\infty;ln(3)],\ g(x) \leq 0$$

Cette inégalité traduit le fait que la courbe $C$ est située en-dessous de la tangente $D_3$ sur l'intervalle $]-\infty;ln(3)]$.

**5.** On admet que le point $I$ est le centre de symétrie de la courbe $C$. Tracer la courbe $C$, les tangentes $D_2$, $D_3$ et les asymptotes à la courbe $C$.




### Exercice n°8

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x$$

**1. a)** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln(1+e^{-x}) = ln(1) = 0$ par composition. Ainsi, par somme de limites :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

**b)** Montrer que la droite $D$ d'équation $y=\frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $C$. Tracer $C$ et $D$.

Comme indiqué à la question précédente : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{3}x = \lim\limits_{x\to+\infty} ln(1+e^{-x}) = 0$. La courbe $C$ admet donc la droite linéaire $D$ d'équation $y=\frac{1}{3}x$ pour asymptote en $+\infty$.

**c)** Etudier la position relative de $D$ et $C$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0 \Longrightarrow 1+e^{-x} > 1 \Longrightarrow f(x) - \frac{1}{3}x = ln(1+e^{-x}) > 0$$

Ainsi, la courbe $C$ est situé au-dessus de son asymptote $D$.

**d)** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ln(e^x+1) - \frac{2}{3}x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ln(e^{-x}(e^x+1)) + \frac{1}{3}x = ln(e^{-x}) + ln(1+e^x) + \frac{1}{3}x = ln(1+e^x) - \frac{2}{3}x$$

**e)** En déduire la limite de $f$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ln(1+e^x) = 0$ par composition. Ainsi, par somme de limites :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

**2. a)** Justifier que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+e^{-x} > 0$. La fonction $f$ est donc bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{1}{3} = \frac{1+e^{-x}-3e^{-x}}{3(1+e^{-x})} = \frac{1-2e^{-x}}{3(1+e^{-x})}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}}$$

**b)** En déduire les variations de $f$.

Pour tout réel $x$, $e^x+1 > 1 > 0$. Donc la fonction $f'$ est du signe du numérateur $e^x-2$. Or $e^x-2 > 0 \Longleftrightarrow x > ln(2)$.

La fonction $f$ est donc décroissante sur $]-\infty; ln(2)]$ puis croissante sur $[ln(2); +\infty[$.

**3.** On note $T$ la tangente à la courbe $C$ au point d'abscisse 0.

**a)** Calculer le coefficient directeur de $T$, puis tracer la droite.

Le coefficient directeur de la tangente $T$ au point d'abscisse 0 est donné par $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

**b)** Soient $M$ et $N$ deux points de la courbe $C$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite $(MN)$ est parallèle à la droite $T$.

Soient $M(x_M; y_M)$ et $N(-x_M; y_N)$ deux points de la courbe $C$, avec $x_M \neq 0$ et $y_M, y_N \in \mathbb{R}$. Leurs coordonnées vérifient donc l'équation de $C$ :

$$y_M = ln(1+e^{-x_M}) + \frac{1}{3}x_M$$

$$y_N = ln(1+e^{x_M}) - \frac{1}{3}x_M$$

La droite $(MN)$ a pour coefficient directeur :

$$\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{ln(1+e^{x_M}) - \frac{1}{3}x_M - ln(1+e^{-x_M}) - \frac{1}{3}x_M}{-2x_M} = -\frac{ln\left(\frac{1+e^{x_M}}{1+e^{-x_M}}\right) - \frac{2}{3}x_M}{2x_M}$$

$$\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = -\frac{1}{2}\frac{ln\left(\frac{e^{x_M}(e^{-x_M}+1)}{1+e^{-x_M}}\right) - \frac{2}{3}x_M}{x_M} = -\frac{1}{2}\frac{x_M - \frac{2}{3}x_M}{x_M}$$

$$\boxed{\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = -\frac{1}{6}}$$

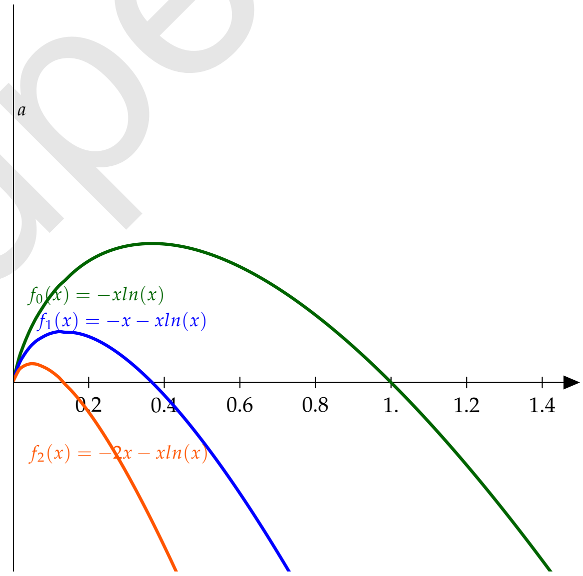
La droite $(MN)$ a ainsi le même coefficient directeur que la tangente $T$. Ces deux droites sont donc parallèles.

**Exercice n°9**

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n$, définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_n : x \longmapsto -nx - xln(x)$$

On note $C_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Les courbes $C_0$, $C_1$ et $C_2$ sont données ci-dessous.




On rappelle que $\lim_{x \to 0} xln(x) = 0$.

**Partie A : étude de la fonction $f_0$**

$$\forall x \in ]0;+\infty[, f_0(x) = -xln(x)$$

**1.** Déterminer la limite de $f_0$ en $+\infty$.

Par produit de limites, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = -\infty}$.

**2.** Etudier les variations de $f_0$ sur $]0;+\infty[$.

La fonction $f_0$ est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produits de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. Ainsi :

$$\forall x > 0,\, f_0'(x) = -ln(x) - x\frac{1}{x} = -ln(x) - 1$$

$$\forall x > 0,\, f_0'(x) > 0 \iff ln(x) < -1 \iff x < e^{-1}$$

Ainsi, la fonction $f_0$ est croissante sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

**Partie B : étude de certaines propriétés de la fonction $f_n$, $n \in \mathbb{N}$**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

**1.** Démontrer que :

$$\forall x \in ]0;+\infty[,\, f_n'(x) = -n - 1 - ln(x)$$

La fonction $f_n$ est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x > 0$ :

$$\boxed{f_n'(x) = -n - ln(x) - x\frac{1}{x} = -n - 1 - ln(x)}$$

**2. a)** Démontrer que la courbe $C_n$ admet en un unique point $A_n$ d'abscisse $e^{-n-1}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Soit $T_{n,a}$ la tangente à la courbe $C_n$ au point d'abscisse $a \in ]0;+\infty[$. Cette tangente a pour coefficient directeur $f_n'(a) = -n - 1 - ln(a)$. Elle est donc parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si :

$$\boxed{f_n'(a) = -n - 1 - ln(a) = 0 \iff ln(a) = -n - 1 \iff a = e^{-n-1}}$$

Ainsi, la courbe $C_n$ admet bien une tangente parallèle à l'axe des abscisses en un unique point $A_n$, qui a pour abscisse $e^{-n-1}$.

**b)** Prouver que le point $A_n$ appartient à la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.

$$f_n(e^{-n-1}) = -ne^{-n-1} - e^{-n-1}ln(e^{-n-1}) = -ne^{-n-1} + (n+1)e^{-n-1} = e^{-n-1}$$

Ainsi, le point $A_n$ a pour coordonnées $(e^{-n-1}; e^{-n-1})$. Il appartient donc bien à la droite linéaire $\Delta$ d'équation $y = x$.

**c)** Placer sur la figure précédente les points $A_0$, $A_1$ et $A_2$.

**3. a)** Démontrer que la courbe $C_n$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté $B_n$, dont l'abscisse est $e^{-n}$.

Les points d'intersection de $C_n$ avec l'axe des abscisses sont donnés par les solutions de l'équation :

$$\forall x \in ]0;+\infty[,\ f_n(x) = 0 \iff -nx - xln(x) = 0 \iff -x(n + ln(x)) = 0 \iff ln(x) = -n \iff x = e^{-n}$$

La courbe $C_n$ coupe donc l'axe des abscisses en un unique point $B_n$, d'abscisse $e^{-n}$.

**b)** Démontrer que la tangente à $C_n$ au point $B_n$ a un coefficient directeur indépendant de l'entier $n$.

La tangente à $C_n$ au point $B_n$ a pour coefficient directeur :

$$f_n'(e^{-n}) = -n - 1 - ln(e^{-n}) = -n - 1 + n = -1$$

Le coefficient directeur de cette tangente est donc bien une constante, indépendante de l'entier $n$.

**c)** Placer sur la figure les points $B_0$, $B_1$ et $B_2$.

**Exercice n°10**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0 : +\infty[$ par :

$$f : x \longmapsto ln(x^2 + 4)$$

**Partie A**

**1.** Etudier les variations de $f$ sur $[0;+\infty[$.

La fonction $f$ est définie, continue et dérivable sur $[0;+\infty[$, comme composée de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ ($\forall x \geq 0, x^2 + 4 \geq 4 > 0$). Ainsi :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{2x}{x^2+4} \geq 0$$

Ainsi, la fonction $f$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

**2.** Soit $g$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

**a)** Etudier les variations de $g$ sur $[0;+\infty[$.

La fonction $g$ est définie, continue et dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme de telles fonctions, et :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ g'(x) = \frac{2x}{x^2+4} - 1 = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x^2+4}$$

La fonction $g'$ est du signe de son numérateur. Le discriminant de ce polynôme du second degré vaut : $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times (-4) = -12 < 0$. Ainsi, ce polynôme, et donc la fonction $g'$, sont de signe constant, à savoir négatif ici, sur $[0;+\infty[$.

La fonction $g$ est donc strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

**b)** Montrer que sur l'intervalle $[2;3]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera $\alpha$. Donner la valeur de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

La fonction $g$ est continue et strictement décroissante sur $[2;3]$, à valeurs dans $[g(3);g(2)]$. De plus, $g(2) = f(2) - 2 = ln(8) - 2 \approx 0.0794 > 0$ et $g(3) = f(3) - 2 = ln(13) - 3 \approx -0.4351 < 0$. Ainsi $0 \in [g(3);g(2)]$. En vertu du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons donc affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2;3]$, notée $\alpha$.

**c)** Justifier que le nombre réel $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. Que représente $\alpha$ pour la fonction $f$.

$$\forall x \in [0; +\infty[, g(x) = 0 \iff f(x) - x = 0 \iff f(x) = x$$

L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution, donnée par le réel $\alpha \in [2;3]$. Ce réel est le point fixe de la fonction $f$.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n)$$

**1.** Tracer $C$, courbe représentative de la fonction $f$, ainsi que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$. Placer les premiers termes de la suite : $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

Voir exercice précédent.

**2.** Placer le point $I$ de la courbe $C$ qui a pour abscisse $\alpha$.

**3. a)** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \alpha$$

Nous pouvons ici raisonner par récurrence. Soit $P_n$ la propriété $1 \leq u_n \leq \alpha$, $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 1 \in [1; \alpha]$. Donc $P_0$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P_n$ est vraie : $1 \leq u_n \leq \alpha$.

$$1 \leq u_n^2 \leq \alpha^2 \implies 5 \leq u_n^2 + 4 \leq \alpha^2 + 4 \implies ln(5) \leq ln(u_n^2 + 4) \leq ln(\alpha^2 + 4)$$

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha) \implies 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha, \text{car } ln(5) \geq 1 \text{ et } f(\alpha) = \alpha$$

Ainsi, $P_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \alpha$

**b)** Démontrer que la suite $(u_n)$ converge.

Nous venons de démontrer que la suite $(u_n)$ est bornée. Etudions sa monotonie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$$

Or, la fonction $g$ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, et s'annule en $x = \alpha$. Nous pouvons donc affirmer qu'elle est positive sur $[0; \alpha]$ puis négative sur $[\alpha; +\infty[$. Or, nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; \alpha]$. Nous avons dès lors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 0$$

La suite $(u_n)$ est donc croissante, et borné dans $[1;\alpha]$. En vertu du théorème de convergence des suites monotones bornées, nous pouvons affirmer qu'elle converge vers une limite $l \in [1;\alpha]$.

**c)** Déterminer sa limite $l$.

La fonction $f$ étant continue, nous pouvons passer à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La limite $l$ de la suite $(u_n)$ est donc solution de l'équation du point fixe de $f$ :

$$\boxed{l = f(l)}$$

Or, nous avons démontré plus haut que la fonction $f$ n'admettait qu'un unique point fixe. Nous avons donc nécessairement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = l = \alpha}$$

### Exercice n°11

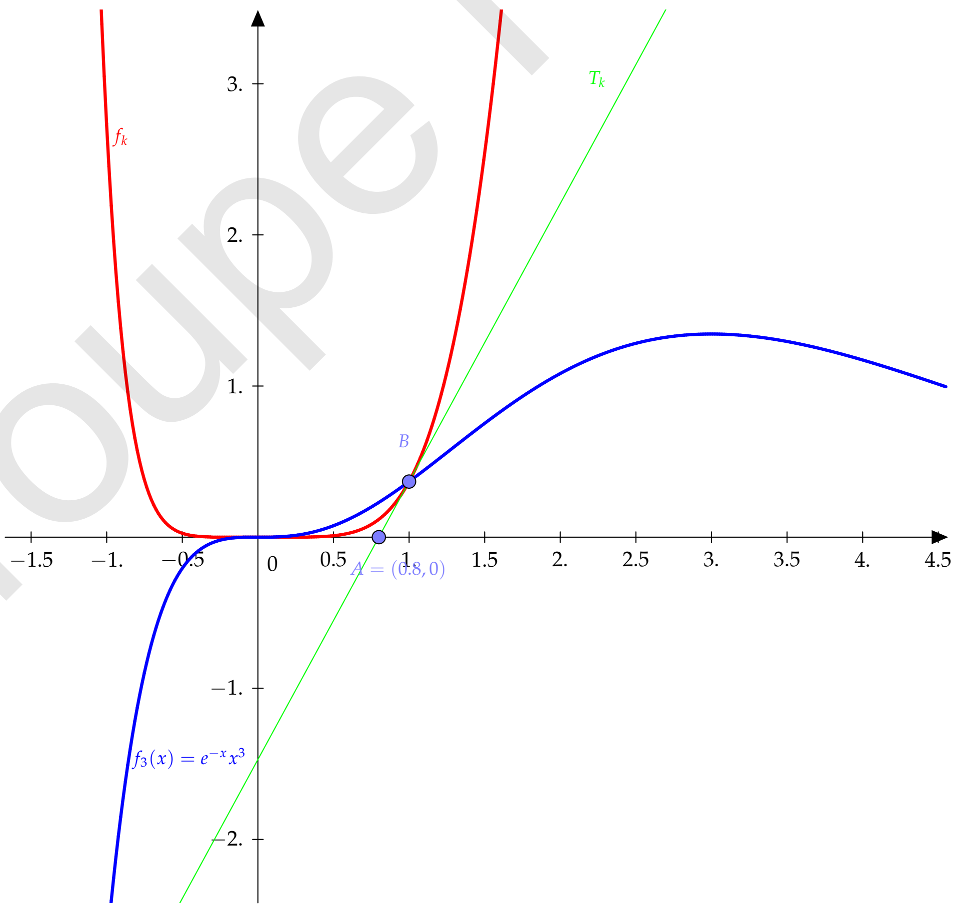
Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on désigne par $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \longmapsto x^n e^{-x}$$

On note $C_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ du plan.

**Partie A**

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $C_k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, et sa tangente $T_k$ au point d'abscisse 1. On donne également le tracé de la courbe $C_3$.



La droite $T_k$ coupe l'axe des abscisses au point $A\left(\frac{4}{5};0\right)$.

**1. a)** Déterminer les limites de la fonction $f_1$ en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = xe^{-x}$$

Par produit de limites : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty}$

Par croissances comparées : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0}$

**b)** Etudier les variations de la fonction $f_1$ et dresser son tableau de variations.

La fonction $f_1$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produits de telles fonctions. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0 \Longrightarrow f_1'(x) \text{ est du signe de } (1-x) : 1-x > 0 \Longleftrightarrow x < 1$$

La fonction $f_1$ est donc croissante sur $]-\infty, 1]$ puis décroissante sur $[1;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

**c)** A l'aide du graphique, justifier que $k$ est ici un entier nécessairement supérieur ou égal à 2.

On constate que les variations de la fonction $f_1$ ne correspondent pas à la représentation graphique de la fonction $f_k$. L'entier $k$ ne peut donc pas être égal à 1. Il est donc nécessairement supérieur à 2.

**2. a)** Démontrer que pour $n \geq 1$, toutes les courbes $C_n$ passent par le point $O$ et par un autre point dont on donnera les coordonnées.

Il s'agit ici de prouver que :
- $\forall n \geq 1, O \in C_n$
- $\exists! M \neq O, \forall n \geq 1, M \in C_n$

• $\forall n \geq 1, f_n(0) = 0^n e^0 = 0$. Donc $\forall n \geq 1, O \in C_n$.

• Soit $M(x_M;y_M)$ un point (fixe !) du plan. Ce point appartient à toutes les courbes $C_n$, $n \geq 1$, si et seulement si :

$$\forall n \geq 1, f_n(x_M) = x_M^n e^{-x_M} = y_M \Longleftrightarrow x_M^n = y_M e^{x_M}$$

Or, le terme de droite $y_M e^{x_M}$, ne dépend pas de $n$. Il s'agit d'une constante, car le point $M$ est fixe. Pour que l'égalité soit vérifiée, le terme de gauche doit donc nécessairement être lui aussi indépendant de $n$ :

$$\forall n \geq 1, x_M^n = cste \iff x_M \in \{0;1\}$$

Ainsi, il existe une unique point, différent de $O$, qui appartienne à toutes les courbes $C_n$ : il s'agit du point $M\left(1;\frac{1}{e}\right)$.

**b)** Vérifier que :

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$$

Les fonctions $f_n$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produits de telles fonctions, et :

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$$

**3.** Sur le graphique, la fonction $f_3$ semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_3'(x) = (3-x)x^2e^{-x}$$

$$f_3'(x) \geq 0 \iff 3 - x \geq 0 \iff x \leq 3$$

La fonction $f_3$ est donc croissante sur $]-\infty;3]$ puis décroissante sur $[3;+\infty[$. Elle admet donc bien un maximum en $x = 3$.

**4. a)** Démontrer que la droite $T_k$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)$.

La droite $T_k$ est la tangente à la courbe $C_k$ au point d'abscisse 1. Son équation est donc donnée par :

$$T_k : y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1) = \frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$$

La droite $T_k$ coupe l'axe des abscisses lorsque :

$$y = 0 \iff \frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e} = 0 \iff (k-1)(x-1) = -1 \iff x - 1 = -\frac{1}{k-1} \iff x = \frac{k-2}{k-1}$$

Ainsi, la droite $T_k$ coupe bien l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)$.

**b)** En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier $k$.

D'après l'énoncé, la droite $T_k$ représentée coupe l'axe des abscisses au point $A\left(\frac{4}{5};0\right)$. Nous avons alors :

$$\frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5} \iff k - 2 = \frac{4}{5}(k-1) \iff k\left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}k = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5} \iff \boxed{k = 6}$$

La courbe représentée dans l'énoncé est donc la courbe $C_6$.

## 1.3 Exercices supplémentaires

**Exercice n°12**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f_\lambda$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_\lambda : x \longmapsto \frac{\lambda x^2}{2} - ln(x)$$

Déterminer le minimum de la fonction $f_\lambda$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout réel $\lambda$ non nul, la fonction $\lambda$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et nous avons :

$$\forall x > 0, f'_\lambda(x) = \lambda x - \frac{1}{x} = \frac{\lambda x^2 - 1}{x}$$

$$\forall x > 0, f'_\lambda(x) \geq 0 \iff \lambda x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq \frac{1}{\lambda}$$

• Si $\lambda < 0$, alors l'inéquation $x^2 > \frac{1}{\lambda}$ est toujours vérifier. La dérivée $f'_\lambda$ est donc strictement positive sur $]0; +\infty[$. Ainsi, la fonction $f_\lambda$ n'admet pas d'extremum sur $]0; +\infty[$.

• Si $\lambda > 0$, alors $\forall x > 0, x^2 \geq \frac{1}{\lambda} \iff x \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Ainsi, la dérivée $f'_\lambda$ s'annule en $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et la fonction $f_\lambda$ est donc strictement décroissante sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right[$ puis strictement croissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{\lambda}}; +\infty\right[$. Elle passe donc par un minimum en $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, qui vaut :

$$\boxed{f_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{\lambda} - ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln(\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + ln(\lambda)\right)}$$

**Exercice n°13**

**a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression :

$$\sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$\forall k \geq 1, 1 + \frac{1}{k} \geq 1 > 0$. Cette somme est donc bien définie.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \ldots, n\}, ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = ln(k+1) - ln(k)$$

Ainsi, les termes de la somme vont se télescoper deux à deux, et nous obtenons au final :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(ln(k+1) - ln(k)\right) = ln(n+1) - ln(1) = ln(n+1)}$$

Quelle est la limite de cette somme lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

On en déduit la limite de la somme :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = +\infty}$$

**b)** Si $n$ est un entier supérieur ou égal à 2, simplifier :

$$\sum_{k=2}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k^2} < 1 \Longrightarrow 1-\frac{1}{k^2} > 0$. Cette somme est donc bien définie.

$$\forall n \geq 2, \forall k\{2,\dots,n\}, ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = ln\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] = ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = ln\left(\frac{k-1}{k}\right)+ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$\forall n \geq 2, \forall k\{2,\dots,n\}, ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = (ln(k-1)-ln(k))+(ln(k+1)-ln(k))$$

Nous voyons ainsi apparaître deux sommes télescopiques :

$$\sum_{k=2}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n}(ln(k-1)-ln(k))+\sum_{k=2}^{n}(ln(k+1)-ln(k)) = \sum_{k=2}^{n}(ln(k+1)-ln(k))-\sum_{k=2}^{n}(ln(k)-ln(k-1))$$

$$\sum_{k=2}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = ln(n+1)-ln(2)-(ln(n)-ln(1)) = ln(n+1)-ln(n)-ln(2)$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-ln(2) = ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-ln(2)}$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque $n$ tend vers $\infty$ ?

La fonction $ln$ étant continue sur $]0;+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = ln(1) = 0$. On en déduit, par somme, la limite de la somme :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -ln(2)}$$

### Exercice n°14

Si $u$ est une fonction dérivable sur l'intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, la dérivée logarithmique de $u$ est la fonction $\frac{u'}{u}$. Le terme "dérivée logarithmique" vient du fait que $\frac{u'}{u}$ est la dérivée de $ln(|u|)$, mais cette interprétation ne simplifie pas les calculs.

**a)** Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Exprimer la dérivée logarithmique de $uv$ en fonctions de celles de $u$ et $v$.

Posons $f = ln(|uv|) = ln(|u|)+ln(|v|)$. La fonction $f$ est dérivable sur $I$ comme composée et somme de telles fonctions, et nous avons :

$$\boxed{f' = \frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}}$$

**b)** Généraliser la question précédente à un produit de $n$ facteurs.

Si l'on considère la fonction $f_n = ln\left(|\prod_{k=1}^{n} u_k|\right) = \sum_{k=1}^{n} ln\left(|u_k|\right)$, où les fonctions $u_k$ sont dérivables sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors $f_n$ est dérivable sur $I$ comme composée et somme de telles fonctions, et nous avons :

$$\boxed{f_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k'}{u_k}}$$

**c)** Soient $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \ldots < a_n$ des réels et $P$ la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$$

Calculer la dérivée logarithmique de $P$ sur chacun des intervalles où cette fonction est définie.

On peut appliquer la fonction $ln$ à la fonction $|P|$ sur tout intervalle du type $]a_i; a_{i+1}[$, avec $i \in \{1; \ldots; n\}$. Sur ces intervalles, la fonction $ln(|P|)$ est dérivable, et nous avons :

$$\boxed{\forall x \in ]-\infty; a_1[ \cup (\cup_{i=1}^{n} ]a_i; a_{i+1}[) \cup ]a_n; +\infty[,\, ln(|P(x)|) = \sum_{i=1}^{n} ln(|x - a_i|)}$$

$$\boxed{\forall x \in ]-\infty; a_1[ \cup (\cup_{i=1}^{n} ]a_i; a_{i+1}[) \cup ]a_n; +\infty[,\, ln'(|P(x)|) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}}$$