Stages intensifs

Résumés de cours et Méthodes

Maths

Terminale S

Groupe Réussite

www.groupe-reussite.fr

contact@groupe-reussite.fr

Chapitre 1

Fonction exponentielle, logarithme népérien, logarithme décimal

1.1 Fonction exponentielle

Définition et propriété : fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$

Propriété

La fonction exponentielle, notée exp, vérifie : $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)}$

et il existe un unique réel, noté e (≈ 2.718), tel que : $exp(e) = 1$

On démontre alors que la fonction exponentielle vérifie la notation suivante :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) = e^x}$$

Propriété : signe et variations

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tous réels x et y :

$$x < y \iff e^x < e^y$$

$$x = y \iff e^x = e^y$$

Propriétés algébriques

Pour tous réels x, y et tout entier n : $e^{x+y} = e^x \times e^y$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

Limites

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = 0$$

(On dit que la fonction exponentielle *domine* les fonctions polynomiales)

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x : $\boxed{exp'(x) = exp(x) = e^x}$

L'approximation affine au voisinage de 0 de la fonction exponentielle est $h \longrightarrow 1 + h$. On écrira :

$e^h \sim 1 + h$, pour h proche de 0

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et, pour tout x de I :

$$\boxed{(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$$

Tableau de variations et courbe

x	$-\infty$	$+\infty$
$exp'(x)$	$+$	
e^x	$0 \nearrow$	$+\infty$

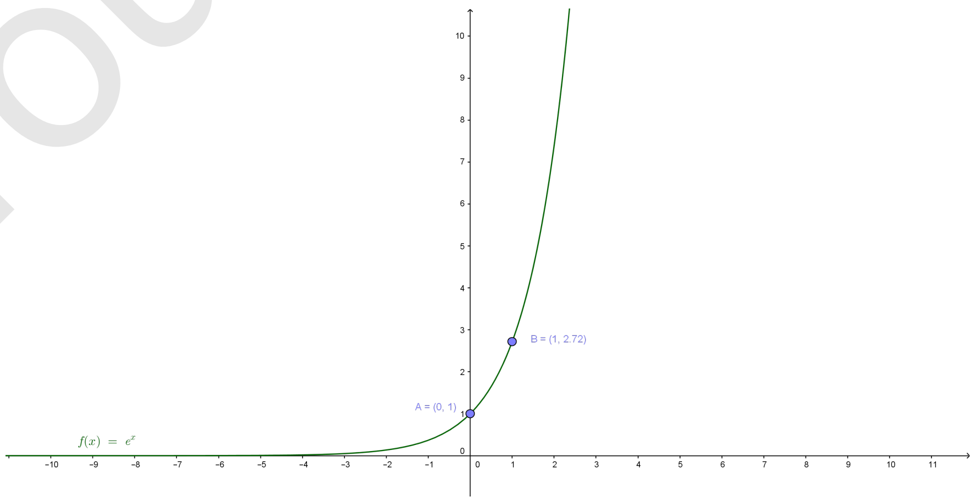

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction exponentielle.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = x + 1$.

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = ex$ (elle passe par l'origine).

Résolution d'équations

Equation : $e^x = y$

Pour tout réel y strictement positif, l'équation $e^x = y$, d'inconnue x, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Equation différentielle d'ordre 1 : $f' = kf$, avec $k \in \mathbb{R}$ (hors programme).

Soit $k \in \mathbb{R}$. Les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient : $f' = kf$ sont les fonctions $x \longrightarrow Ae^{kx}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

1.2 Fonctions logarithmes népérien et décimal

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0;+\infty[$, et vérifie :

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, \forall y \in \mathbb{R}, ln(x) = y \Longleftrightarrow e^y = x}$$

Première propriétés La fonction ln a pour ensemble de définition $]0;+\infty[$ et vérifie :

$$\boxed{\forall x, y > 0, ln(x \times y) = ln(x) + ln(y)}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, ln(e^x) = x}$$

$$\boxed{\forall x > 0, e^{ln(x)} = x}$$

La fonction ln s'annule en 1 : $ln(1) = 0$.

Signe

La fonction ln est strictement négative sur $]0;1[$ puis strictement positive sur $]1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	||	$-$	0	$+$	

Propriétés algébriques

Pour tous x et y dans $]0;+\infty[$, et tout entier n :

$$ln(xy) = ln(x) + ln(y)$$

$$ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$$

$$ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$$

$$ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}ln(x)$$

$$ln\left(x^n\right) = nln(x)$$

Limites

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$$

Dérivée et sens de variation

• La fonction ln est dérivable (donc continue) sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel x strictement positif :

$$\boxed{ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

• L'approximation affine au voisinage de 0 de la fonction $h \longmapsto ln(1+h)$ est $h \longmapsto h$. On écrira :

$$ln(1+h) \sim h, \text{ pour } h \text{ proche de } 0$$

• La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc, pour tous réels x et y de $]0;+\infty[$:

$$x < y \Longleftrightarrow ln(x) < ln(y)$$

$$x = y \Longleftrightarrow ln(x) = ln(y)$$

• Si une fonction u est positive et ne s'annule pas sur un intervalle I, alors $ln(u)$ est dérivable sur I et, pour tout x de I :

$$\boxed{(ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Tableau de variations et courbe

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$ln'(x)$	‖	$+$
$ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

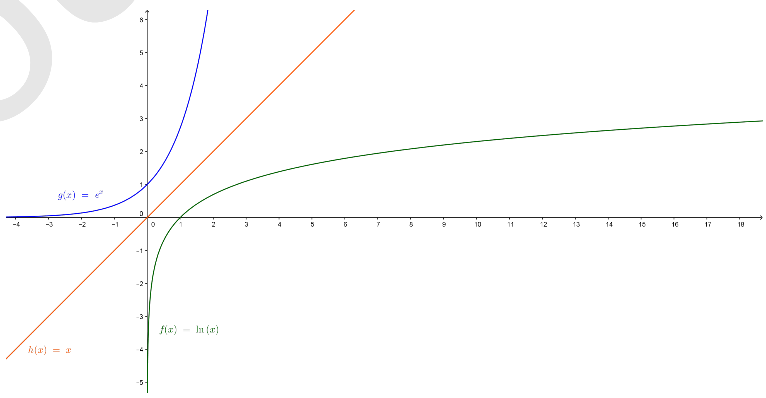

FIGURE 1.2 – Courbes représentatives des fonctions ln, exp et linéaire d'équation $y = x$.

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Définition

On appelle fonction logarithme décimal la fonction, notée log, et définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$$

Croissance comparée des fonctions exponentielle, puissances entières et logarithme

Pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

(à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0$$

(en $+\infty$, les puissances de x l'emportent sur le logarithme de x)