Stages intensifs

GROUPE RÉUSSITE

Exercices et Annales

Maths

Terminale S

Groupe Réussite

www.groupe-reussite.fr

contact@groupe-reussite.fr

Chapitre 1

Fonction exponentielle, logarithme népérien et logarithme décimal

1.1 Exercices préliminaires

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice n°1

Déterminer la limite éventuelle de la fonction f proposée en a :

1. $f : x \longmapsto ln(9 - x^2)$ en $a = 3$
2. $f : x \longmapsto ln(1 - ln(x))$ en $a = e$
3. $f : x \longmapsto x - ln(x)$ en $a = +\infty$
4. $f : x \longmapsto \frac{x^2}{ln(x)}$ en $a = 0$

Exercice n°2

Déterminer la dérivée de la fonction f proposée :

1. $f : x \longmapsto xln(x)$
2. $f : x \longmapsto ln(e^x - 1)$
3. $f : x \longmapsto ln(|x|)$

Exercice n°3

1. Justifier le résultat du cours :

$$\lim_{h \to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$$

2. En déduire la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} xln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Exercice n°4

D'après le cours : $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$.

En déduire :

1. la limite de $\frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$
2. la limite de $xln(x)$ quand x tend vers 0

1.2 Problèmes

Exercice n°5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto ln(1+e^x)$$

Soit C sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Etudier le sens de variation de f et préciser son signe.

3. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + f(-x)$$

   En déduire que la courbe C admet en $+\infty$ une asymptote, notée Δ. Préciser la position de C par rapport à Δ.

4. Tracer Δ et C.

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur $I =]-1; +\infty[$ par :

$$f : x \longmapsto x - \frac{ln(1+x)}{1+x}$$

Soit C sa courbe représentative.

Partie A : étude de certaines propriétés de la courbe C

1. Justifier que f est dérivable sur $I =]-1; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

2. Pour tout x dans I, on pose : $N(x) = (1+x^2) - 1 + ln(1+x)$

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur I. Calculer $N(0)$ et en déduire les variations de f.

3. Soit D la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

Que représente ce point d'intersection pour la fonction f ?

Partie B : étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0; 4]$ alors $f(x) \in [0; 4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a) Tracer l'allure de la courbe C et la droite D. Placer les premiers termes de la suite : u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 4]$

c) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Notons l sa limite. Déterminer l grâce à la partie A.

Exercice n°7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Démontrer que la droite D_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe C.

c) Etudier la position de C par rapport à D_1.

2. a) Justifier que f est dérivable sur R, et calculer sa dérivée. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3. a) Que peut-on dire de la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse $ln(3)$?

b) En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe C par rapport à D_2.

4. a) Montrer que la tangente D_3 à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

b) Etudier la position de la courbe C par rapport à la tangente D_3 sur l'intervalle $]-\infty; ln(3)]$.

On pourra étudier la dérivée seconde de f, définie pour tout réel x de $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}$$

5. On admet que le point I est le centre de symétrie de la courbe C. Tracer la courbe C, les tangentes D_2, D_3 et les asymptotes à la courbe C.

Exercice n°8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$$

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite D d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe C. Tracer C et D.

c) Etudier la position relative de D et C.

d) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$$

e) En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$$

b) En déduire les variations de f.

3. On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

a) Calculer le coefficient directeur de T, puis tracer la droite.

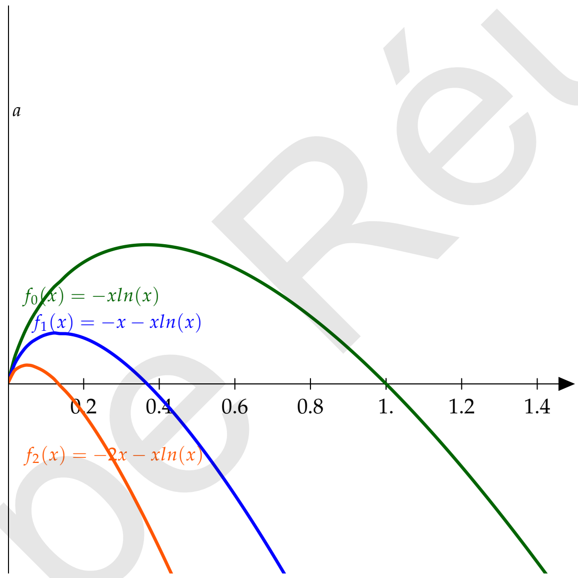
b) Soient M et N deux points de la courbe C d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite T.

Exercice n°9

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n, définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n : x \longmapsto -nx - xln(x)$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Les courbes C_0, C_1 et C_2 sont données ci-dessous.



On rappelle que $\lim_{x \to 0} xln(x) = 0$.

Partie A : étude de la fonction f_0

$$\forall x \in]0; +\infty[, f_0(x) = -xln(x)$$

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.

2. Etudier les variations de f_0 sur $]0; +\infty[$.

Partie B : étude de certaines propriétés de la fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f_n'(x) = -n - 1 - ln(x)$$

2. a) Démontrer que la courbe C_n admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

b) Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.

c) Placer sur la figure précédente les points A_0, A_1 et A_2.

3. a) Démontrer que la courbe C_n coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.

b) Démontrer que la tangente à C_n au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.

c) Placer sur la figure les points B_0, B_1 et B_2.

Exercice n°10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 : +\infty[$ par :

$$f : x \longmapsto ln(x^2 + 4)$$

Partie A

1. Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Etudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.

b) Montrer que sur l'intervalle $[2; 3]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α. Donner la valeur de α à 10^{-1} près.

c) Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. Que représente α pour la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Tracer C, courbe représentative de la fonction f, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$. Placer les premiers termes de la suite : u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. Placer le point I de la courbe C qui a pour abscisse α.

3. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \alpha$$

b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

c) Déterminer sa limite l.

Exercice n°11

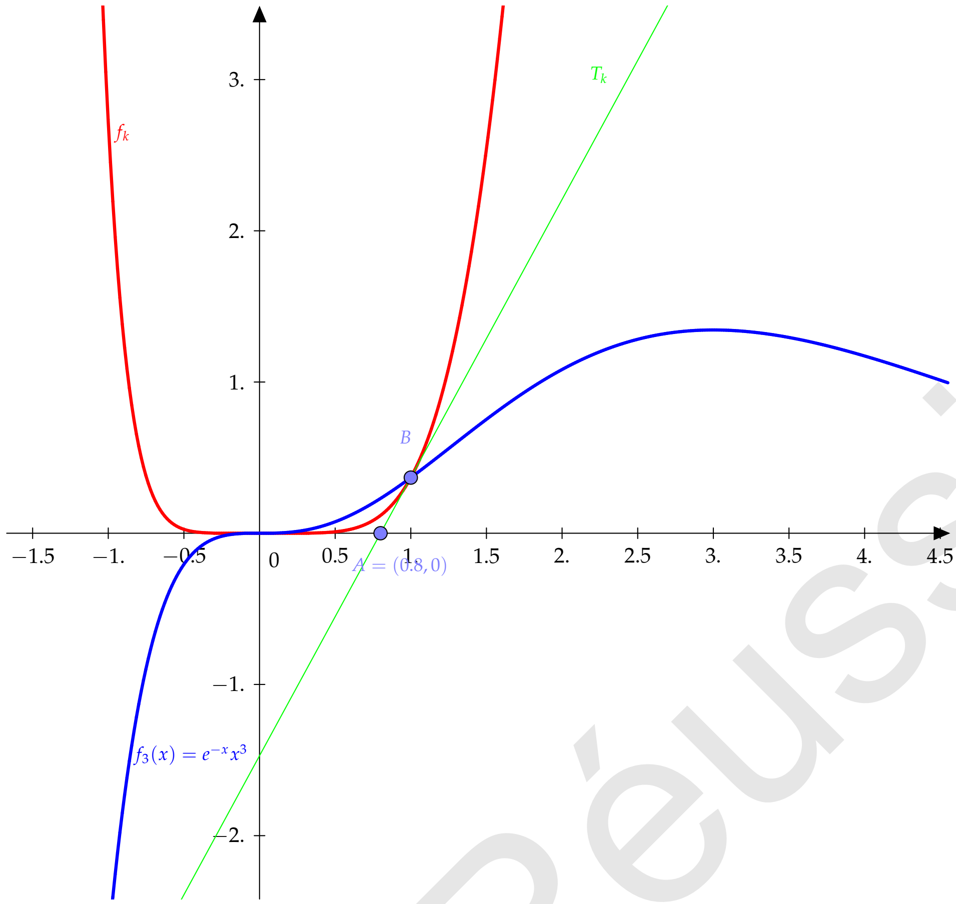
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \longmapsto x^n e^{-x}$$

On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe C_k, avec $k \in \mathbb{N}^*$, et sa tangente T_k au point d'abscisse 1. On donne également le tracé de la courbe C_3.



La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point $A\left(\frac{4}{5};0\right)$.

1. a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Etudier les variations de la fonction f_1 et dresser son tableau de variations.

c) A l'aide du graphique, justifier que k est ici un entier nécessairement supérieur ou égal à 2.

2. a) Démontrer que pour $n \geq 1$, toutes les courbes C_n passent par le point O et par un autre point dont on donnera les coordonnées.

b) Vérifier que :

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. a) Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)$.

b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

1.3 Exercices supplémentaires

Exercice n°12

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_\lambda : x \longmapsto \frac{\lambda x^2}{2} - ln(x)$$

Déterminer le minimum de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice n°13

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression :

$$\sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Quelle est la limite de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Si n est un entier supérieur ou égal à 2, simplifier :

$$\sum_{k=2}^{n} ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers ∞ ?

Exercice n°14

Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, la dérivée logarithmique de u est la fonction $\frac{u'}{u}$. Le terme "dérivée logarithmique" vient du fait que $\frac{u'}{u}$ est la dérivée de $ln(|u|)$, mais cette interprétation ne simplifie pas les calculs.

a) Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Exprimer la dérivée logarithmique de uv en fonctions de celles de u et v.

b) Généraliser la question précédente à un produit de n facteurs.

c) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \ldots < a_n$ des réels et P la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$$

Calculer la dérivée logarithmique de P sur chacun des intervalles où cette fonction est définie.