

Puissances

Z, auctore

4 décembre 2005

L'écriture des nombres sous forme de *puissances* se prête à des règles de calcul simples.

1 Définitions

Pour tout nombre a on définit les puissances de a par

$$a^2 = a \times a \tag{1}$$

$$a^3 = a \times a \times a \tag{2}$$

etc...

et de façon générale,

$$\boxed{a^n = a \times a \times \cdots \times a} \tag{3}$$

ici avec n entier ≥ 3 . Dans cette dernière ligne, le nombre a figure n fois.

Le symbole a^n représente donc le résultat de la multiplication de a par lui-même autant de fois qu'indiqué par n . On dit que a^n est la **puissance** n -ième de a , et n est appelé **exposant** de cette puissance. Cette définition admet pour extensions les importants cas particuliers suivants

$$a^1 = a \quad \text{et} \quad a^0 = 1. \tag{4}$$

On est conduit à poser¹ les définitions suivantes

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \tag{5}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \tag{6}$$

etc...

¹en cohérence avec les règles de calcul de la section suivante

et plus généralement

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad (7)$$

où n est ici un nombre entier positif. Le symbole a^{-n} désigne l'inverse de la puissance a^n , ce qui définit les puissances d'exposant *néгатif*.

On a donc l'égalité

$$a^n \times a^{-n} = 1. \quad (8)$$

2 Règles de calcul

Pour tous entiers n et p , pour tous nombres a et b , on a les propriétés suivantes, qui permettent les calculs sous forme de puissance.

Propriété 1 *Produit de puissances*

$$\boxed{a^n \times a^p = a^{n+p}} \quad (9)$$

Par exemple, on a

$$7^3 \times 7^{-5} = 7^{3+(-5)} = 7^{-2}. \quad (10)$$

Il suffit d'*ajouter les exposants* en respectant les règles de la somme des nombres relatifs.

Propriété 2 *Puissance de puissances*

$$\boxed{(a^n)^p = a^{n \times p}} \quad (11)$$

Par exemple, on a

$$(5^{-4})^3 = 5^{-4 \times 3} = 5^{-12}. \quad (12)$$

Il suffit de *multiplier les exposants* en respectant les règles du produit des nombres relatifs.

Propriété 3 *Quotient de puissances*

$$\boxed{\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}} \quad (13)$$

Par exemple, on a

$$\frac{10^{-8}}{10^{-15}} = 10^{-8-(-15)} = 10^7. \quad (14)$$

Il semble malgré tout préférable (dans un premier temps) de calculer ce genre de quotient en utilisant les importantes égalités

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

et de cette façon on écrit plutôt

$$\frac{10^{-8}}{10^{-15}} = 10^{-8} \times \frac{1}{10^{-15}} = 10^{-8} \times 10^{15} = 10^7. \quad (15)$$

Ceci permet de n'utiliser que la règle du produit de puissances.

Propriété 4 *Produit de puissances de même exposant*

$$\boxed{a^n \times b^n = (a \times b)^n} \quad (16)$$

Par exemple, on a

$$2^3 \times 5^3 = 10^3. \quad (17)$$

3 Cas particulier des puissances de 10

Lorsque $a = 10$, on obtient par exemple les résultats suivants

...	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	...
...	10000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	...

et de façon générale, pour tout entier n positif, on a

$$10^n = 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{et} \quad 10^{-n} = \underbrace{0, \dots 0}_{n \text{ zéros}} 1. \quad (18)$$

L'utilité de ces égalités réside dans les changement d'écriture de certains nombres décimaux. Par exemple, on a

$$180500000 = 1805 \times 100000 = 1805 \times 10^5 \quad (19)$$

On peut aussi continuer en écrivant

$$1805 = 1,805 \times 1000 = 1,805 \times 10^3.$$

On en déduit finalement l'écriture scientifique du nombre initial

$$180500000 = 1,805 \times 10^3 \times 10^5 = \boxed{1,805 \times 10^8} \quad (20)$$

Dans le cas de nombres positifs moindres que 1, on a par exemple

$$0,000000732 = 7,32 \times 0,0000001 = \boxed{7,32 \times 10^{-7}} \quad (21)$$

De façon générale, un nombre décimal $D > 0$ est **écrit sous forme scientifique** lorsqu'on a l'égalité

$$\boxed{D = d \times 10^k, \text{ avec } 1 \leq d < 10} \quad (22)$$

où k est un entier relatif et d est un nombre décimal.