Angles et cercles en Troisième

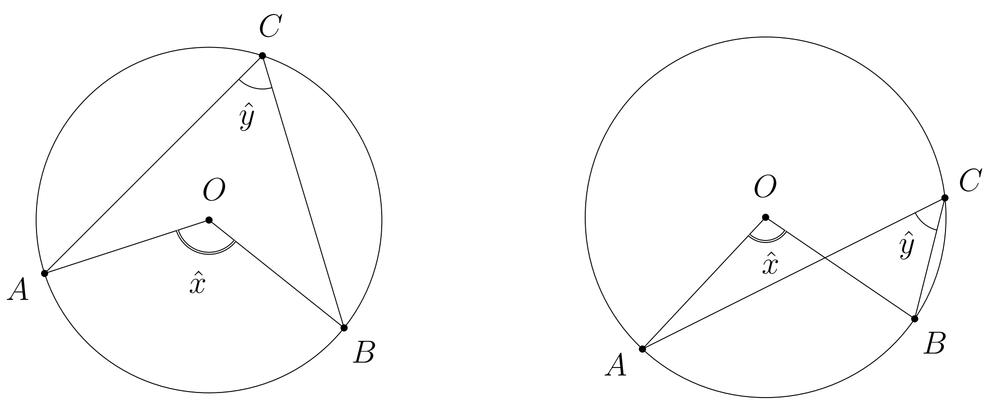
Z, auctore

18 juin 2007

Théorème 1. *Soient A, B, C trois points d'un cercle de centre O. Si les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc, alors on a*

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}.$$

1er cas de figure — 2e cas de figure



Tab. 1 – Le théorème de l'angle au centre : $\hat{x} = 2 \times \hat{y}$.

Preuve du théorème. [Se reporter aux figures Tab. 2] La première partie de la preuve concerne le cas de figure où le centre O est contenu dans l'angle $\widehat{ACB}$. Soit C' le point diamétralement opposé à C sur le cercle. Alors le triangle ACC' est rectangle en A. Alors $\widehat{AOC'}$ est le supplément de $\widehat{AOC}$, c'est-à-dire

$$\widehat{AOC'} = 180 - \widehat{AOC}.$$

De plus, dans le triangle AOC isocèle en O, on a

$$\widehat{AOC} = 180 - \widehat{ACO} - \widehat{CAO} = 180 - 2 \times \widehat{ACO}.$$

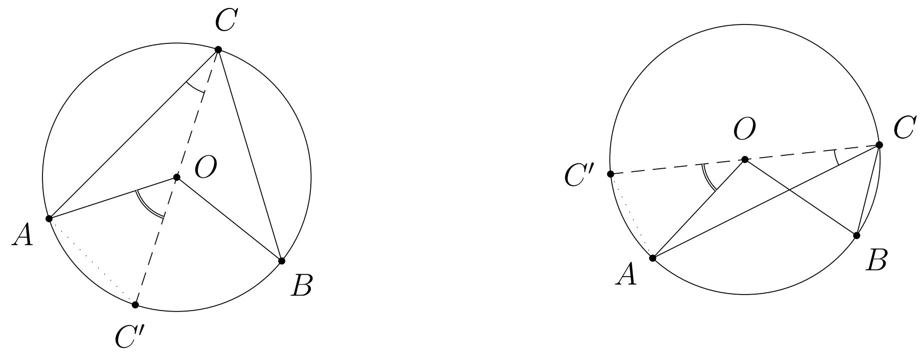
On en déduit donc que

$$\widehat{AOC'} = 180 - \widehat{AOC} = 180 - (180 - 2 \times \widehat{ACO}) = 2 \times \widehat{ACO}.$$

Ceci montre le théorème de l'angle au centre dans le cas particulier où l'un des côtés est un diamètre du cercle. Le triangle CBC' étant rectangle en B, on a donc aussi

$$\widehat{C'OB} = 2 \times \widehat{C'CB}.$$

TAB. 2 – Les deux cas de figure envisagés dans la preuve.



L'angle inscrit contient le centre. L'angle inscrit ne contient pas le centre.

Puisque les angles $\widehat{AOC'}$ et $\widehat{C'OB}$ sont adjacents, tout comme les angles $\widehat{ACC'}$ et $\widehat{C'CB}$, on en déduit que

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC'} + \widehat{C'OB} = 2\widehat{ACC'} + 2\widehat{C'CB} = 2\widehat{ACB}.$$

Le deuxième cas de figure est celui où le centre est hors de l'angle $\widehat{ACB}$. Avec le diamètre $[CC']$, on a successivement

$$\widehat{C'OA} = 2 \times \widehat{C'CA} \quad \text{et} \quad \widehat{C'OB} = 2 \times \widehat{C'CB},$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{C'OB} - \widehat{C'OA} = 2 \times (\widehat{C'CB} - \widehat{C'CA}) = 2 \times \widehat{ACB}.$$

□

Corollaire 1. *Dans un cercle, un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Les angles inscrits interceptant le même arc sont donc tous égaux.*

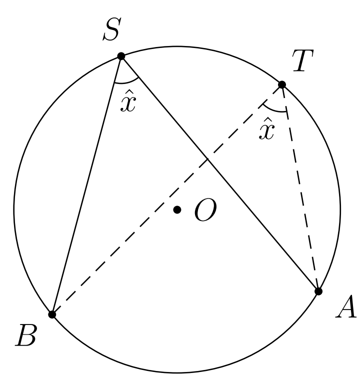


FIG. 1 – Le théorème des angles inscrits.

Démonstration. D'après le théorème de l'angle au centre, puisque les angles inscrits $\widehat{ASB}$ et $\widehat{ATB}$ interceptent le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$, on a

$$2 \times \widehat{ASB} = \widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ATB}.$$

□

Vocabulaire. Un quadrilatère est **convexe** lorsqu'il contient ses diagonales. Un quadrilatère est dit **inscrit** dans un cercle lorsque ses quatre sommets sont situés sur le même cercle. Des angles sont **supplémentaires** lorsque leur somme vaut 180°.

Corollaire 2. *Si un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle, alors ses angles opposés sont supplémentaires.*

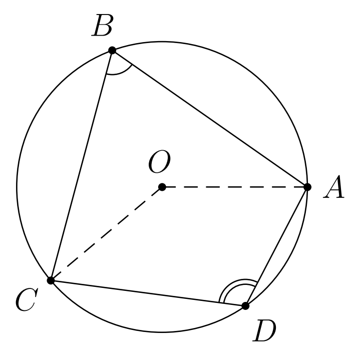


FIG. 2 – On a $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

Preuve rapide. Le théorème de l'angle au centre et l'angle plein autour du point O donnent :

$$2 \times \widehat{ASB} + 2 \times \widehat{ATB} = 360^\circ, \quad \text{d'où} \quad \widehat{ASB} + \widehat{ATB} = 180^\circ.$$

□

Corollaire 3. *Le théorème de l'angle au centre reste valable lorsque l'un des côtés de l'angle inscrit devient tangent au cercle.*

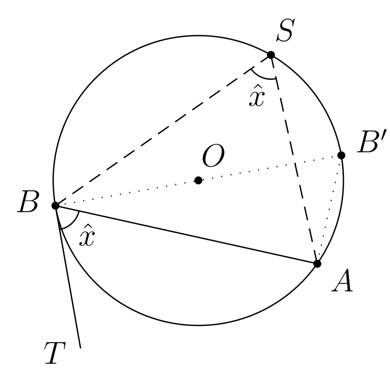


FIG. 3 – Cas « limite » de la tangente.

Preuve rapide. Avec le diamètre $[BB']$, les angles $\widehat{B'BT}$ et $\widehat{B'AB}$ sont droits. On voit donc que les angles $\widehat{ABT}$ et $\widehat{AB'B}$ ont le même complémentaire $\widehat{BB'A}$; ils sont donc égaux : $\widehat{ABT} = \widehat{AB'B} = \widehat{ASB}$. □