Réduction et racines carrées

Z, auctore

21 janvier 2006

1 Rappels

La *racine carrée* d'un nombre $a \geq 0$ est le nombre positif que l'on désigne par le symbole $\sqrt{a}$, tel que
$$(\sqrt{a})^2 = a.$$
Le symbole $\sqrt{a}$ est appelé *radical*, on dit aussi que a est le *radicande*.
La **propriété fondamentale** suivante est vérifiée pour tous a et b positifs

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Une conséquence de cette formule est le fait que, pour a et b positifs

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}.$$

2 Réduction du radicande

Lorsque le nombre figurant sous la racine carrée contient un *facteur carré*, on peut effectuer la simplification suivante

$$A = \sqrt{490} = \sqrt{49 \times 10} = \sqrt{49} \times \sqrt{10} = \boxed{7\sqrt{10}}$$

C'est *l'extraction des facteurs carrés* du radicande. On essaie en priorité de décomposer les radicandes à l'aide des facteurs carrés usuels, comme $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, etc. qui sont à bien connaître (liste non-exhaustive).

Exercice 1 *Simplifier ainsi les radicandes suivants*

$$B = \sqrt{98}, \quad C = \sqrt{50}, \quad D = \sqrt{108}.$$

Les réponses sont données à la section 4.1.

3 Réduire des sommes de radicaux

Lorsque les radicandes *ne peuvent pas être simplifiés*, on procède ainsi

$$\begin{aligned} E &= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 7\sqrt{2} + \sqrt{5} - 2\sqrt{5} \\ &= (3-7)\sqrt{2} + (4+1-2)\sqrt{5} \\ &= \boxed{-4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Exercice 2 *Réduire de la même manière les expressions suivantes*

$$\begin{aligned} F &= 6\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 10\sqrt{3} \\ G &= 3,5\sqrt{6} - 3\sqrt{10} + 1,2\sqrt{6} + \sqrt{10} - 2,7\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Les réponses sont données à la section 4.2.

Lorsque les radicandes *peuvent être simplifiés*, on commence par extraire les facteurs carrés, puis on effectue la réduction comme ci-dessus.

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{12} - \sqrt{8} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{50} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{3} - \sqrt{4} \times \sqrt{2} - 5\sqrt{9} \times \sqrt{3} + 4\sqrt{25} \times \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 5 \times 3 \times \sqrt{3} + 4 \times 5 \times \sqrt{2} \\ &= (2-15)\sqrt{3} + (-2+20)\sqrt{2} \\ &= \boxed{-13\sqrt{3} + 18\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Exercice 3 *Simplifier comme ci-dessus les expressions suivantes.*

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{700} + 2\sqrt{75} - 3\sqrt{28} + \sqrt{48} \\ J &= \sqrt{3}\sqrt{15} - \sqrt{162} + \sqrt{8} - \sqrt{125} + 3\sqrt{20} \\ K &= \sqrt{256} + 4\sqrt{180} - 15 - 5\sqrt{80}. \end{aligned}$$

Les réponses sont données à la section 4.3.

4 Solutions des exercices

4.1 Solutions de l'exercice 1

$$B = \sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = \boxed{7\sqrt{2}}$$
$$C = \sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \boxed{5\sqrt{2}}$$
$$D = \sqrt{108} = \sqrt{36} \times \sqrt{3} = \sqrt{36} \times \sqrt{3} = \boxed{6\sqrt{3}}$$

4.2 Solutions de l'exercice 2

$$\begin{aligned} F &= 6\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 10\sqrt{3} \\ &= (-5 - 1 + 10)\sqrt{3} + (6 + 4 - 2)\sqrt{5} \\ &= \boxed{4\sqrt{3} + 8\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= 3,5\sqrt{6} - 3\sqrt{10} + 1,2\sqrt{6} + \sqrt{10} - 2,7\sqrt{6} \\ &= (3,5 + 1,2 - 2,7)\sqrt{6} + (-3 + 1)\sqrt{10} \\ &= \boxed{2\sqrt{6} - 2\sqrt{10}} \end{aligned}$$

4.3 Solutions de l'exercice 3

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{700} + 2\sqrt{75} - 3\sqrt{28} + \sqrt{48} \\ &= \sqrt{100} \times \sqrt{7} + 2 \times \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{7} + \sqrt{16} \times \sqrt{3} \\ &= 10\sqrt{7} + 10\sqrt{3} - 6\sqrt{7} + 4\sqrt{3} \\ &= (10 + 4)\sqrt{3} + (10 - 6)\sqrt{7} = \boxed{14\sqrt{3} + 4\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{3}\sqrt{15} - \sqrt{162} + \sqrt{8} - \sqrt{125} + 3\sqrt{20} \\ &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} - \sqrt{81} \times \sqrt{2} + \sqrt{4} \times \sqrt{2} - \sqrt{25} \times \sqrt{5} + 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} - 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\ &= (-9 + 2)\sqrt{2} + (3 - 5 + 6)\sqrt{5} = \boxed{-7\sqrt{2} + 4\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{256} + 4\sqrt{180} - 15 - 5\sqrt{80} \\ &= \sqrt{16^2} + 4 \times \sqrt{36} \times \sqrt{5} - 15 - 5 \times \sqrt{16} \times \sqrt{5} \\ &= 16 + 24\sqrt{5} - 15 - 20\sqrt{5} \\ &= 1 + (24 - 20)\sqrt{5} = \boxed{1 + 4\sqrt{5}} \end{aligned}$$

5 Exercices supplémentaires

Exercice 4 *Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant deux entiers, avec b le plus petit possible.*

$$L = \sqrt{26} \times \sqrt{78} \qquad M = \sqrt{14} \times \sqrt{35}$$
$$N = \sqrt{27} \times \sqrt{72} \qquad O = \sqrt{24} \times \sqrt{30}$$

Exercice 5 *Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a, b entiers.*

$$P = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{125} + 6\sqrt{45}$$
$$Q = \sqrt{20} + 3\sqrt{180} - 2\sqrt{80}$$
$$R = 3\sqrt{96} + \sqrt{150} - 2\sqrt{6}$$

Exercice 6 *Donner l'écriture la plus simple des nombres suivants.*

$$S = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{147}}{\sqrt{27}} \qquad T = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{98} + 3\sqrt{2}}$$

Exercice 7 *Simplifier l'écriture du nombre suivant*

$$U = \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}$$