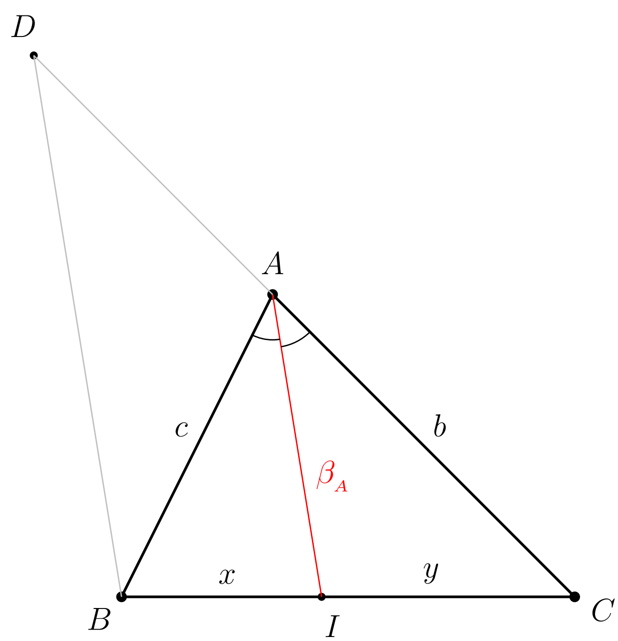
Propriétés de la bissectrice en 1$^{\text{re}}$ S

Z, auctore

10 juillet 2007

Théorème 1 (Troisième)**.** *Dans le triangle ABC, la bissectrice de $\widehat{A}$ partage le segment opposé $[BC]$ proportionnellement aux côtés de $\widehat{A}$. Précisément, on a*

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{x}{y} = \frac{c}{b}\,.$$



Démonstration. La parallèle à (AI) en B coupe (AC) en D. Alors les angles $\widehat{ABD}$ d'une part alterne-interne à $\widehat{BAI}$, et $\widehat{BDA}$ d'autre part correspondant à $\widehat{IAC}$, sont égaux : ainsi le triangle ADC est isocèle en A, donc $AD = c$. Avec le théorème de Thalès (les segments correspondants sont proportionnels), on en déduit

$$\frac{BI}{IC} = \frac{DA}{AC}\,,$$

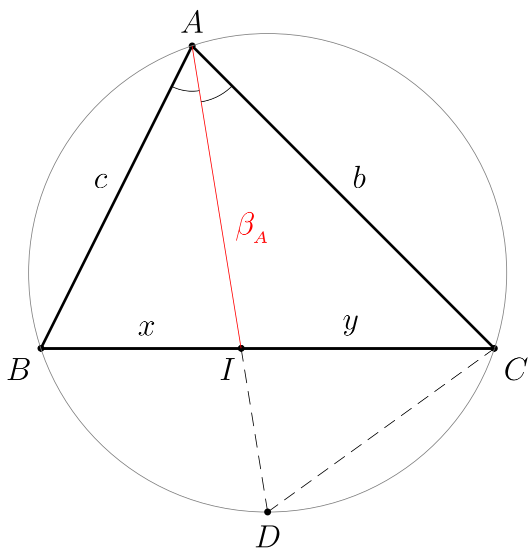
c'est-à-dire

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}\,.$$

□

Théorème 2 (Seconde)**.** *Dans le triangle ABC, le produit des deux côtés AB et AC s'exprime à l'aide des segments déterminés par le pied I de la bissectrice de $\widehat{A}$:*

$$AB \times AC = IB \times IC + AI^2 \qquad \textit{ou encore} \qquad b\,c = x\,y + \beta_A^2.$$



Démonstration. Soit D, le point d'intersection de (AI) et du cercle circonscrit à ABC. Les triangles AIB et ACD sont semblables comme ayant deux angles correspondants égaux ; les côtés correspondants sont proportionnels, c'est-à-dire en particulier

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AI}{AC}\,.$$

Le produit des côtés AB et AC devient donc

$$\begin{aligned} AB \times AC &= AI \times AD \\ &= AI \times (AI + ID) \\ &= AI^2 + AI \times ID. \qquad (1) \end{aligned}$$

Or, les triangles AIB et CID sont semblables ; donc on a

$$\frac{AI}{CI} = \frac{BI}{DI}$$

d'où

$$AI \times ID = BI \times IC.$$

En remplaçant dans (1), on obtient la formule annoncée

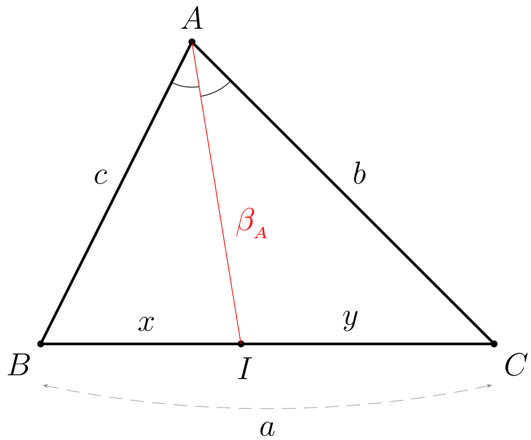
$$AB \times AC = AI^2 + AI \times ID = AI^2 + BI \times IC.$$

□

Théorème 3 (Seconde)**.** *Dans le triangle ABC, la longueur du segment de bissectrice de $\widehat{A}$ est donnée par*

$$\beta_{A} = \frac{2\sqrt{b\,c\,p\,(p-a)}}{b+c}.$$

en notant $p = (a+b+c)/2$.



Démonstration. D'après le théorème 2 précédent, on sait que

$$\beta_A^2 = bc - xy\,. \tag{2}$$

Or, le théorème 1 peut se traduire par le tableau de proportionnalité suivant

x	y	$x+y=a$
c	b	$b+c$

On en déduit

$$x = \frac{ac}{b+c} \quad \text{et} \quad y = \frac{ab}{b+c}.$$

En reportant ces valeurs dans (2), on a

$$\begin{aligned} \beta_A^2 &= bc - \frac{ac}{b+c} \times \frac{ab}{b+c} \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2}\big((b+c)^2 - a^2\big). \end{aligned}$$

Par factorisation, on en déduit

$$\beta_A^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a).$$

Or avec $p = (a+b+c)/2$, on a

$$(b+c-a)(b+c+a) = 2(p-a)2p\,,$$

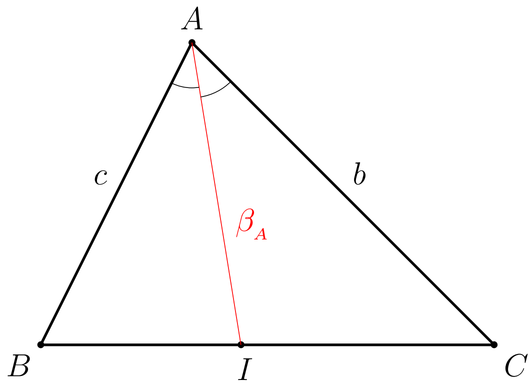
d'où finalement

$$\beta_A^2 = \frac{4\,b\,c}{(b+c)^2}\,p\,(p-a).$$

□

Théorème 4 (Première)**.** *La longueur du segment de bissectrice de $\widehat{A}$ est donnée par*

$$\beta_{_A} = \frac{2\,b\,c\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{b+c}\,.$$



Démonstration. L'aire de ABC peut s'exprimer de deux façons. D'une part on a

$$S = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\widehat{A}\,.$$

D'autre part avec $\text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(ABI) + \text{Aire}(AIC)$, on a aussi

$$S = \frac{1}{2}\,c\,\beta_A \sin\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{1}{2}\,b\,\beta_A \sin\frac{\widehat{A}}{2}.$$

On en déduit donc

$$\beta_A\,(b+c)\sin\frac{\widehat{A}}{2} = b\,c\,\sin\widehat{A}\,.$$

La formule de duplication du sinus donne

$$\beta_A\,(b+c)\sin\frac{\widehat{A}}{2} = 2\,b\,c\,\sin\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{A}}{2}\,.$$

On a donc finalement

$$\beta_A = \frac{2\,b\,c}{b+c} \times \cos\frac{\widehat{A}}{2}\,.$$

□