Arithmétique : PGCD Plus Grand Diviseur Commun

1. **Définitions :**

   (a) **Nombre premier**

   Un nombre premier est un entier naturel strictement supérieur à 1 et qui a pour seul diviseur 1 et lui même.

   (b) **PGCD de deux nombres entiers**

   Parmi tous les diviseurs communs à deux nombres entiers a et b, il y en a un qui est plus grand que tous les autres : c'est le Plus Grand Commun Diviseur à a et b. On le note PGCD $(a\,;\,b)$.

   Il est possible de se restreindre aux entiers positifs, un PGCD de deux entiers relatifs étant égal au PGCD de leurs valeurs absolues.

   Exemple : trouver le PGCD de 36 et de 24.

   Quand il s'agit de petits nombres comme dans cet exemple, on peut faire la liste des diviseurs de chacun des nombres proposés.

   Les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 et 36 et ceux de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

   Le PGCD de 36 et de 24 est 12.

   (c) Entiers premiers entres eux

   On dit que deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

   Exemple 1 : 12 et 7 sont premiers entre eux car leur seul diviseur commun est 1.

   Exemple 2 : 24 et 36 ne sont pas premiers entre eux cars ils ont des diviseurs commnuns, autres que 1.

   (d) Fractions irréductibles

   Une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux est irréductible.

2. **Détermination de tous les diviseurs d'un nombre entier :**

   Exemple : Touver les diviseurs de 50.

   On cherche toutes les façons possibles d'écrire 50 sous forme de produit de deux entiers.

   On trouve donc les diviseurs de 50 deux par deux.

   $50 = 1 \times 50$

   $50 = 2 \times 25$

   $50 = 5 \times 10$

   Les diviseurs de 50 sont 1, 2, 5, 10, 25, 50.

   Tous nombre entier est divisible par 1 et par lui-même.

3. **Détermination du PGCD de deux nombres :**

   (a) **Méthode de recherche par soustractions successives**

   Si $a > b$ et k diviseur de a et de b alors k est diviseur de leur différence.

   démonstration :

   k diviseur de a

   k diviseur de b

   $a = k \times a'$ avec a' entier

   $b = k \times b'$ avec b' entier

   alors $a - b = ka' - kb'$

   $= k \times (a' - b')$

   $= k \times (entier)$

   donc k est diviseur de $a - b$.

   PGCD(a ; b)=PGCD(b ; $a-b$)

   PGCD(a ; a)=a

   PGCD(a ; 1)=1

   Exemple : Calculer le PGCD de 26 187 et 11 223.

   On remplace donc la recherche du PGCD de 26 187 et 11 223 par celle du PGCD de deux nombres plus petits 14 964 et 11 223.

PGCD(26 187 ; 11 223)	= PGCD(**14 964** ; 11 223)	car $26187 - 11223 = \mathbf{14\ 964}$
PGCD(14 964 ; 11 223)	= PGCD(11 223 ; **3 741**)	car $14964 - 11223 = \mathbf{3\ 741}$
PGCD(11 223 ; 3 741)	= PGCD(**7 482** ; 3 741)	car $11223 - 3741 = \mathbf{7\ 482}$
PGCD(7 482 ; **3 741**)	= PGCD(3 741 ; 3 741)	car $7482 - \mathbf{3\ 741} = 3741$
PGCD(3 741 ; **3 741**)	= **3 741**	car $3741 - 3741 = \mathbf{0}$

   conclusion : PGCD(26 187 ; 11 223) = 3 741

   Pour trouver le PGCD de deux nombres *a* et *b* ($a > b$) par la méthode des soustractions successives, on remplace le plus grand des deux nombres par ($a - b$) puis on réitère le procédé jusqu'à l'obtention de deux nombres égaux (soustraction dont le résultat est nul). Le PGCD de *a* et *b* est ainsi égal à ces deux derniers nombres.

   (b) **Méthode de recherche par divisions successives**

   Exemple : trouver le PGCD de 819 et 663.

   La méthode s'appuie sur le fait qu'un diviseur commun à 810 et 663 est aussi un diviseur commun à 663 et au reste 156 de la division de 810 par 663. On remplace donc la recherche du PGCD de 810 et 663 par la recherche du PGCD *de deux nombres plus petits* 663 et 156.

   On recommence le processus de division avec ces deux nouveaux nombres.

   On arrête quand on obtient un reste nul, c'est-à-dire lorsque l'un des nombres est multiple de l'autre.

PGCD(819 ; 663)	= PGCD(663 ; **156**)	car $819 = 663 \times 1 + \mathbf{156}$
PGCD(663 ; **156**)	= PGCD(156 ; **39**)	car $663 = 156 \times 4 + \mathbf{39}$
PGCD(156 ; **39**)	= 39	car $156 = 39 \times 4 + \mathbf{0}$

   Le PGCD de 819 et de 663 est donc 39 (dernier reste non nul).

L'Algorithme d'Euclide : Pour trouver le PGCD de deux nombres *a* et *b* (*a*>*b*) par la méthode des divisions successives on remplace le plus grand des deux nombres par le reste *r* de la division de *a* par *b*, puis on réitère le procédé jusqu'à l'obtention de deux nombres dont l'un est multiple de l'autre (division dont le reste et nul). Le PGCD de *a* et *b* est ainsi égal au dernier reste non nul.

Note : *un algorithme est un énoncé dans un langage bien défini d'une suite d'opérations permettant de résoudre par calcul un problème.*

4. **Simplification d'une fraction :**

Pour rendre irréductible une fraction, on divise son numérateur et son dénominateur par leur PGCD.

Exemple : simplifier $\frac{35}{64}$ et $\frac{663}{819}$.

Les nombres 35 et 54 étant premier entre eux, la fraction $\frac{35}{64}$ est irréductible.
Le PGCD de 819 et 663 est **39** donc

$$\frac{663}{819}=\frac{17\times\cancel{39}}{21\times\cancel{39}}=\frac{17}{21}$$