

Factorisation et équation-produit

[Z, auctore](#)

1. La multiplication possède cette propriété

$$P \times Q = 0 \quad \text{équivaut à} \quad P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0.$$

C'est-à-dire qu'un produit de facteurs ne peut être nul que si l'un au moins de ses facteurs est nul. Cette propriété permet de résoudre les équations particulières où les deux conditions suivantes sont remplies

- l'un des membres est 0 ;
- l'autre membre est sous forme factorisée.

2. Ainsi, par exemple, l'équation du type **produit-nul** suivante

$$2x(3x + 1)(5 - 2x) = 0 \tag{1}$$

revient à

$$2x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 5 - 2x = 0$$

c'est-à-dire

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2}$$

les solutions de l'équation (1) sont les nombres $-1/3$, 0 et $5/2$.

3. Les méthodes de factorisation par facteur commun et/ou par identité remarquable permettent de résoudre certaines équations de degré supérieur ou égal à 2. Par exemple, l'équation

$$(x - 5)^2 - 36(x + 1)^2 = 0 \tag{2}$$

peut être mise sous la forme d'un produit nul, puisque l'on a

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 - 36(x + 1)^2 &= (x - 5)^2 - (6(x + 1))^2 \\ &= ((x - 5) - 6(x + 1))((x - 5) + 6(x + 1)) \\ &= (x - 5 - 6x - 6)(x - 5 + 6x + 6) \\ &= (-5x - 11)(7x + 1). \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (2) équivaut à $(-5x - 11)(7x + 1) = 0$, qui est du type produit-nul. Ses solutions sont données par

$$-5x - 11 = 0 \quad \text{ou} \quad 7x + 1 = 0$$

les solutions de l'équation (2) sont donc $-1/7$ et $-11/5$.

Voici quelques exercices d'application, d'après des sujets du Brevet 2005.

Énoncés

Question 1. Soit $E = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 2)$.

1. Factoriser $4x^2 - 9$. En déduire la factorisation de l'expression E .
2. Résoudre l'équation $E = 0$.

Question 2. Soit $F = (2x - 3)^2 - (4x + 7)(2x - 3)$.

1. Factoriser l'expression F .
2. Résoudre l'équation $F = 0$.

Question 3. Soit $G = (3x + 5)(2x + 7) - (3x + 5)^2$.

1. Factoriser G .
2. Résoudre l'équation $G = 0$.

Question 4. Soit $H = (x - 3)^2 - 25$.

1. Factoriser l'expression H .
2. Résoudre l'équation $H = 0$.

Question 5. Soit $I = x^2 - 9 - 2(x - 3)$.

1. Factoriser $x^2 - 9$. En déduire la factorisation de I .
2. Résoudre l'équation $I = 0$.

Réponses partielles

Question 1 Les solutions sont $\frac{-3}{2}$ et $\frac{5}{3}$.

Question 2 Les solutions sont $\frac{3}{2}$ et -5 .

Question 3 Les solutions sont 2 et $\frac{-5}{3}$.

Question 4 Les solutions sont -2 et 8.

Question 5 Les solutions sont -1 et 3.