Inégalités et Encadrements

1. Inégalités et addition

(a) En ajoutant (ou en retranchant) un même nombre réel aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens.

$$a \leq b \Longleftrightarrow a+x \leq b+x$$
$$a \leq b \Longleftrightarrow a-x \leq b-x$$

Exemple 1 : $1 \leq 5$
donc $1+2 \leq 5+2$ (soit $3 \leq 7$)
et $1-2 \leq 5-2$ (soit $-1 \leq 3$)

Exemple 2 : $-4 \leq -2$
donc $-4+2 \leq -2+2$ (soit $-2 \leq 0$)
et $-4-2 \leq -2-2$ (soit $-6 \leq -4$)

(b) En ajoutant membre à membre deux inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.

$$\text{Si} \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \quad \text{alors } a+c \leq b+d$$

Exemple :

$$\begin{array}{rc} & 2 \leq a \leq 3 \\ + & -5 \leq b \leq -2 \\ \hline & 2-5 \leq a+b \leq 3-2 \\ & -3 \leq a+b \leq -1 \end{array}$$

2. Inégalités et multiplication

(a) i. Lorsqu'on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre réel **strictement positif**, on obtient une inégalité **de même sens**.

$$\text{Si} \begin{cases} a \leq b \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{alors } ax \leq bx$$

$$\text{Si} \begin{cases} a \leq b \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{alors } \frac{a}{x} \leq \frac{b}{x}$$

Exemple 1 : $1 \leq 5$
donc $1 \times 2 \leq 5 \times 2$ (soit $2 \leq 10$)

Exemple 2 : $-4 \leq -2$

donc $(-4)\times 2 \leq (-2)\times 2$(soit $-8 \leq -4$)

et $\dfrac{-4}{2} \leq \dfrac{-2}{2}$ (soit $-2 \leq -1$)

ii. Lorsqu'on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre réel **strictement négatif**, on obtient une inégalité **sens contraire**.

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq b \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{alors } ax \geq bx$$

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq b \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{alors } \frac{a}{x} \geq \frac{b}{x}$$

Exemple 1 : $1 \leq 5$

donc $1\times(-2) \geq 5\times(-2)$ (soit $-2 \geq -10$)

Exemple 2 : $-4 \leq -2$

donc $(-4)\times(-3) \geq (-2)\times(-3)$ (soit $12 \geq 6$)

et $\dfrac{-4}{-3} \geq \dfrac{-2}{-3}$ (soit $\frac{4}{3} \geq \frac{2}{3}$)

iii. Deux réels et leurs oppposés sont rangés dans un ordre contraire.

$$\text{Si } a \leq b \text{ alors } -a \geq -b$$

Exemple : $1 \leq 5$

$1\times(-1) \geq 5\times(-1)$ (soit $-1 \geq -5$)

(b) En multipliant membre à membre deux inégalités de même sens et ne portant que sur des réels **positifs ou nuls**, on obtient une inégalité de même sens.

$$\text{Si } \begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{cases} \quad \text{alors } 0 \leq ac \leq bd$$

Exemple :

$$\begin{array}{rc} & 2 \leq a \leq 3 \\ \times & 1 \leq b \leq 5 \\ \hline & 2\times 1 \leq ab \leq 3\times 5 \\ & 2 \leq ab \leq 15 \end{array}$$

3. **Rangement des inverses**

(a) Deux réels strictements positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

$$\text{Si } 0 < a \leq b \text{ alors } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

(b) Deux réels strictements négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

$$\text{Si } a \leq b < 0 \text{ alors } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

Exemple 1 : $2 \leq 4$

donc $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

Exemple 2 : $-5 \leq -1$

donc $\frac{1}{-5} \geq \frac{1}{-1}$ (soit $\frac{1}{-5} \geq -1$)

4. **Rangement des carrés**

(a) Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

$$\text{Si } 0 \leq a \leq b \quad \text{alors } a^2 \leq b^2$$

(b) Deux réels négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés.

$$\text{Si } a \leq b \leq 0 \quad \text{alors } a^2 \geq b^2$$

Exemple : $-4 \leq -2 \leq 0$

donc $(-4)^2 \geq (-2)^2$ (soit $16 \geq 4$)

5. **Rangement des racines carrées, des puissances**

(a) Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrés.

$$\text{Si } 0 \leq a \leq b \text{ alors } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, deux réels positifs a et b sont rangés dans le même ordre que a^n et b^n.

$$\text{Si n entier, } \quad n \geq 1\,;\ 0 \leq a \leq b \text{ alors } a^n \leq b^n$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,et pour a positif ou nul

$$\text{Si } 0 \leq a \leq 1\,;\text{ alors } a \geq a^2 \geq a^3 \geq a^4 \geq \ldots$$
$$\text{Si } 1 \leq a\,;\text{ alors } a \leq a^2 \leq a^3 \leq a^4 \leq \ldots$$

6. **Application : techniques d'encadrement**

Soient a et b deux réels tels que :

$$1 < a < 2 \text{ et } -5 < b < -3$$

Donner un encadrement des nombres suivants :

$a+b$; $a-b$; $3b-2a$; ab ; $\frac{a}{b}$; $\frac{b}{a}$; $\frac{\sqrt{a-1}}{b^2}$

Note : Pour ce type d'exercice, il est avantageux d'utiliser le symbol $<$ toujours dans le même sens. Ainsi nous préférerons écrire $-2 < -a < -1$ plutôt que $-1 > -a > -2$

- $a+b$

  addition membre à membre

$$\begin{array}{rrcl} & 1 < & a & < 2 \\ + & -5 < & b & < -3 \\ \hline & 1-5 < & a+b & < 2-3 \end{array}$$

$$\boxed{-4 < a+b < -1}$$

- $a-b$

  $a-b = a+(-b)$

$$\begin{array}{rrcl} & 1 < & a & < 2 \\ + & 3 < & -b & < 5 \\ \hline & 1+3 < & a+(-b) & < 2+5 \end{array}$$

$$\boxed{4 < a-b < 7}$$

- $3b-2a$

$$(-5)\times 3 < 3b < (-3)\times 3$$
$$2\times(-2) < -2a < 1\times(-2)$$

$$\begin{array}{rrcl} & -15 < & 3b & < -9 \\ + & -4 < & -2a & < -2 \\ \hline & -15-4 < & 3b-2a & < -9-2 \end{array}$$

$$\boxed{-19 < 3b-2a < -11}$$

- ab

  La multiplication membre à membre n'étant autorisée que pour les nombres strictements positifs, il faut au préalable encadrer -b.

$$\begin{array}{rrcl} & 3 < & -b & < 5 \\ \times & 1 < & a & < 2 \\ \hline & 3\times 1 < & -ba & < 5\times 2 \\ & 3 < & -ba & < 10 \end{array}$$

$$\boxed{-10 < ab < -3}$$

- $\frac{a}{b}$

  $\frac{a}{b} = a\times \frac{1}{b}$

  Comme précedemment, il faut s'assurer que les deux facteurs soient strictement positifs.

$$\frac{-1}{3} < \frac{1}{b} < \frac{-1}{5}$$

$$\begin{array}{rc}
 & \frac{1}{5} < \frac{-1}{b} < \frac{1}{3} \\
\times & 1 < a < 2 \\
\hline
 & \frac{1}{5}\times 1 < a\times\frac{-1}{b} < \frac{1}{3}\times 2 \\
 & \frac{1}{5} < \frac{-a}{b} < \frac{2}{3} \\
 & \boxed{\frac{-2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{-1}{5}}
\end{array}$$

☛ $\frac{b}{a}$

$$\begin{array}{rc}
 & 3 < -b < 5 \\
\times & \frac{1}{2} < \frac{1}{a} < 1 \\
\hline
 & 3\times\frac{1}{2} < (-b)\times\frac{1}{a} < 5\times 1 \\
 & \frac{3}{2} < \frac{-b}{a} < 5 \\
 & \boxed{-5 < \frac{b}{a} < \frac{-3}{2}}
\end{array}$$

☛ $\frac{\sqrt{a-1}}{b^2}$

$$1-1 < a-1 < 2-1$$
$$0 < a-1 < 1$$
$$0 < \sqrt{a-1} < 1$$

$$-5 < b < -3$$
$$9 < b^2 < 25$$

$$\begin{array}{rc}
 & \frac{1}{25} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{9} \\
\times & 0 < \sqrt{a-1} < 1 \\
\hline
 & \frac{1}{25}\times 0 < \frac{1}{b^2}\times\sqrt{a-1} < \frac{1}{9}\times 1 \\
 & \boxed{0 < \frac{\sqrt{a-1}}{b^2} < \frac{1}{9}}
\end{array}$$