Quelques théorèmes de géométrie du triangle

Z, auctore

1er novembre 2005

1 Propriété des angles

Théorème 1 *Dans un triangle, la somme des trois angles vaut* $180\,^\circ$.

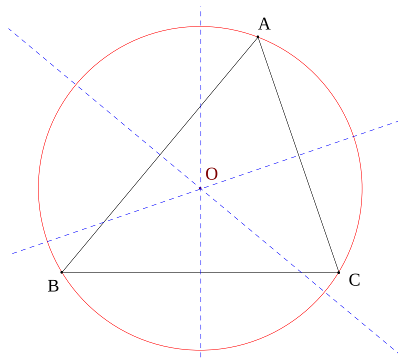
Précisément, pour un triangle ABC, on a la relation

$$\boxed{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180}$$

Cette relation permet de calculer la mesure en degrés d'un angle dès que l'on connaît celles des deux autres.

2 Propriétés du cercle circonscrit

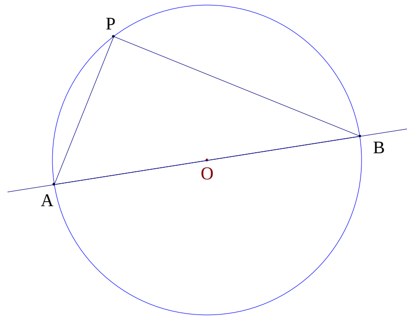
Il est bien connu que, pour *tout* triangle ABC, il existe un unique cercle passant par les trois sommets A, B et C : c'est le cercle *circonscrit* au triangle. Son centre est situé à l'intersection des médiatrices de chacun des côtés du triangle : ce point est équidistant des sommets.



2.1 Le théorème direct

On rappelle que, dans un triangle rectangle, le côté qui est opposé à l'angle droit est appelé *hypoténuse*.

Théorème 2 *Pour tout triangle* ***rectangle****, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.*



Lorsque l'angle $\widehat{APB}$ est droit, alors $[AB]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle PAB. En conséquence, la *médiane* $[PO]$ issue de l'angle droit est un rayon du cercle, et donc mesure la moitié de l'hypoténuse

$$\boxed{PO = AB \div 2}$$

Ce théorème permet de *prouver* que le sommet de l'angle droit est situé sur un cercle particulier ; il permet aussi de *calculer* la longueur de la médiane issue de l'angle droit.

2.2 La réciproque

Théorème 3 *Le triangle formé en reliant un point situé sur un cercle aux extrémités de l'un de ses diamètres est un triangle rectangle.*

Précisément, si $[AB]$ est un diamètre du cercle et si P est un point de ce cercle, alors le triangle PAB est rectangle en P.
C'est un théorème permettant de *prouver* qu'un triangle est rectangle.

3 Propriétés de Pythagore

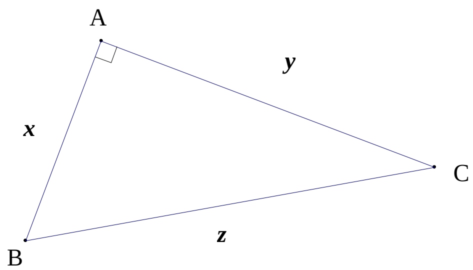
3.1 Le théorème direct

Théorème 4 *Dans un triangle* ***rectangle****, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.*

Dans la figure suivante, en notant $AB = x$, $AC = y$ et $BC = z$, on a

$$\boxed{x^2 + y^2 = z^2}$$

C'est la *relation de Pythagore* entre les côtés x, y et z d'un triangle rectangle.



Lorsqu'un triangle est rectangle, on peut donc *calculer* l'un des côtés à partir des deux autres.
On peut aussi utiliser ainsi ce théorème : si l'on connaît les trois côtés et si ceux-ci ne vérifient pas la relation de Pythagore, alors le triangle n'est pas rectangle.

3.2 La réciproque

Théorème 5 *Dans un triangle,* ***si*** *le carré du plus grand des côtés est égal à la somme des carrés des deux plus petits côtés,* ***alors*** *le triangle est rectangle.*

Lorsqu'on connaît les longueurs des trois côtés x, y et z, on peut donc *prouver* qu'un triangle est rectangle si ces nombres vérifient la relation de Pythagore.

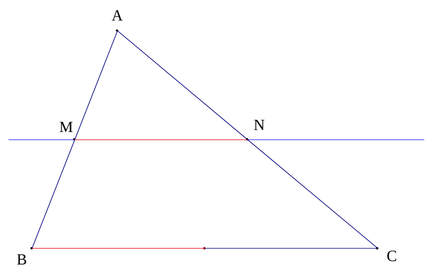
4 Propriétés des milieux

4.1 Le théorème direct

Théorème 6 *Dans tout triangle, les milieux de **deux** côtés sont tels que*
- *la droite qui joint ces milieux est parallèle au troisième côté,*
- *le segment qui joint ces milieux mesure la moitié du troisième côté.*

Ci-dessous, M étant le milieu de $[AB]$ et N étant celui de $[AC]$, alors on a

$$(MN) \; // \; (BC) \qquad \text{et} \qquad MN = BC \div 2.$$



Ce théorème permet dans certains cas de *prouver* que deux droites sont parallèles ou bien de *calculer* une longueur.

4.2 La réciproque

Théorème 7 *Dans un triangle, **si** une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle à un deuxième côté, **alors** elle coupe nécessairement le troisième côté en son milieu.*

Ceci permet de *prouver* qu'un point donné est le milieu d'un segment.

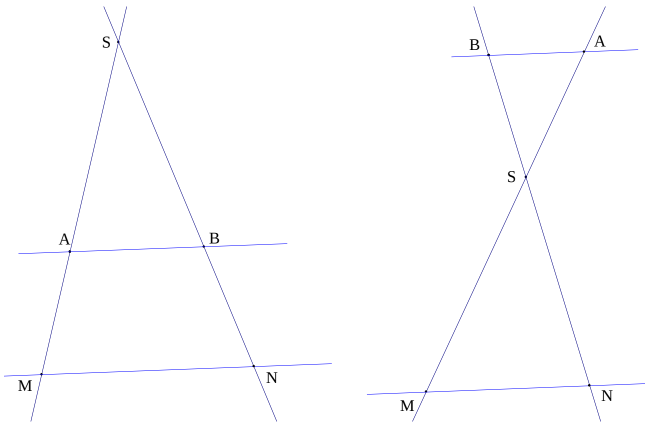
5 Propriétés de Thalès

5.1 Le théorème direct

Théorème 8 *Deux triangles à côtés **parallèles** ont leurs côtés proportionnels ; précisément si (MA) et (NB) sont sécantes en S, et si (MN) est parallèle à (AB), alors on a*

$$\boxed{\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{MN}{AB}}$$

Ci-dessous, on illustre les deux cas de figure habituels, selon que les parallèles sont d'un même côté du sommet S (configuration « triangulaire ») ou bien sont situées de part et d'autre de S (configuration « papillon »).



Ce théorème permet de *calculer* un côté à partir d'autres, sachant le parallélisme des côtés. Il permet aussi de *prouver* que des droites ne sont pas parallèles (lorsque les rapports ne sont pas égaux).

5.2 La réciproque

Théorème 9 *Lorsque (AM) et (BN) sont sécantes en S et si*
- *d'une part, les points S, A et M se suivent dans le même ordre que les points S, B et N,*
- *d'autre part, les rapports $\dfrac{SM}{SA}$ et $\dfrac{SN}{SB}$ sont égaux,*

alors les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

C'est un théorème permettant de *prouver* que deux droites sont parallèles dans des conditions strictes d'alignement et de proportionnalité.