Formule de la médiane en Première S

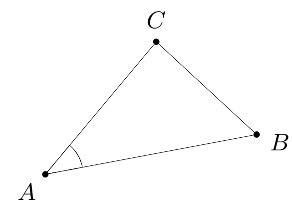
Z, auctore

28 juin 2007

On suppose connue la loi des cosinus (formule d'Al-Kashî), dont l'énoncé est rappelé ci-dessous.

Théorème 1 (Loi des cosinus)**.** *Dans tout triangle ABC, on a*

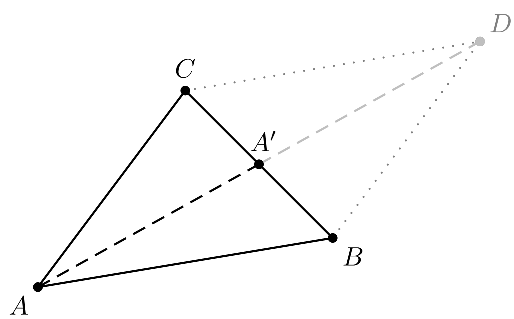
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$



Cette relation permet de calculer la longueur d'une médiane à partir des côtés dans un triangle.

Théorème 2 (Formule de la médiane)**.** *Dans un triangle ABC avec A' milieu de $[BC]$, on a*

$$4 \times AA'^2 = 2 \times AB^2 + 2 \times AC^2 - BC^2.$$



Démonstration. Avec D symétrique de A par rapport à A', la loi des cosinus dans ABD donne

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \times AB \times BD \times \cos \widehat{ABD}.$$

Or, on a $BD = AC$, $AD = 2 \times AA'$ et $\widehat{ABD} = 180 - \widehat{BAC}$; donc

$$4 \times AA'^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC},$$

puisque deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés.
Dans le triangle ABC, la loi des cosinus donne

$$2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = AB^2 + AC^2 - BC^2.$$

On en déduit donc

$$4 \times AA'^2 = 2 \times AB^2 + 2 \times AC^2 - BC^2.$$

□

Corollaire 1. *Avec les notations traditionnelles (a, b, c et m_A) dans le triangle, on a*

$$\boxed{m_A^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$$