

Formule de la hauteur en 1^{re} S

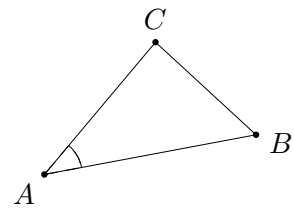
Z, auctore

6 juillet 2007

On suppose connue la loi des cosinus (formule d'Al-Kashî) :

Théorème 1 (Loi des cosinus). *Dans tout triangle ABC,*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

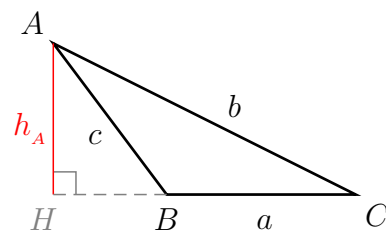
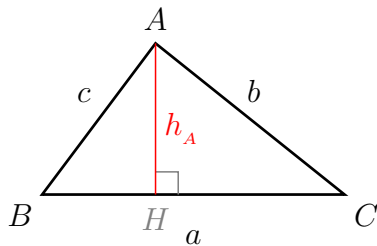


Cette relation permet de calculer la longueur d'une hauteur à partir de celles des côtés.

Théorème 2. *Dans un triangle ABC, le segment h_A de hauteur issue de A est donné en fonction de côtés a, b, c par*

$$h_A = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où p désigne le demi-périmètre $(a+b+c)/2$.



Démonstration. Avec la loi des cosinus, on a

$$a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos \widehat{B} = b^2.$$

Par projection de AB sur (BC) , on a

$$c \times \cos \widehat{B} = BH.$$

D'où

$$a^2 + c^2 - 2 \times a \times BH = b^2.$$

On a donc

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Dans le triangle ABH , le théorème de Pythagore donne donc

$$AH^2 = c^2 - BH^2 = c^2 - \left[\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right]^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Pour obtenir une expression plus « lisible », on fait apparaître une différence de deux carrés :

$$AH^2 = \frac{(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2};$$

la factorisation par l'identité $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ donne

$$AH^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}.$$

Avec les identités $u^2 + v^2 \pm 2uv = (u \pm v)^2$, on a

$$AH^2 = \frac{((a + c)^2 - b^2)(b^2 - (a - c)^2)}{4a^2}.$$

L'identité $u^2 - v^2$ donne encore

$$AH^2 = \frac{(a + c - b)(a + c + b)(b - a + c)(b + a - c)}{4a^2}.$$

En observant la symétrie des différents facteurs du numérateur, on écrit

$$AH^2 = \frac{(a + b + c - 2b)(a + b + c)(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c)}{4a^2}.$$

Avec le demi-périmètre

$$p = \frac{a + b + c}{2},$$

on a donc

$$AH^2 = \frac{2(p - b) \times 2p \times 2(p - a) \times 2(p - c)}{4a^2} = \frac{16(p - b)p(p - a)(p - c)}{4a^2}.$$

On en déduit finalement

$$AH = \sqrt{\frac{4(p - b)p(p - a)(p - c)}{a^2}} = \frac{2\sqrt{(p - b)p(p - a)(p - c)}}{a}.$$

□

Corollaire 1. L'aire du triangle ABC est donnée par $\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

Démonstration. En effet, l'aire est donnée par

$$S = \frac{a \times h_A}{2} = \frac{a \times \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{2} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

□