

Sélection FESIC
Admission en 1ère année du 1er cycle 2007

Exercice 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A d'affixe i , M d'affixe z et M' d'affixe z' avec $z' \neq z$.

On appelle :

- _ h l'homothétie de centre A et de rapport 2;
- _ r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- _ t la translation de vecteur \vec{v} .

- a) Si $M' = h(M)$, alors $z' = 2z - i$.
- b) Si $M' = t(M)$ alors $z' = z - i$.
- c) Si $M' = r(M)$, alors A appartient à la médiatrice de $[MM']$.
- d) Soit B le point d'affixe $4 - 3i$.

Le point $B' = r(B)$ a pour affixe $3 + 4i$.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = -\sqrt{5} + i\sqrt{15}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Un argument de a^n est $\frac{2n\pi}{3}$.
- b) O appartient à la médiatrice de $[AB]$.
- c) OAB est un triangle rectangle en O .
- d) Le cercle circonscrit à OAB a pour rayon 3.

Exercice 3

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et $2i$.

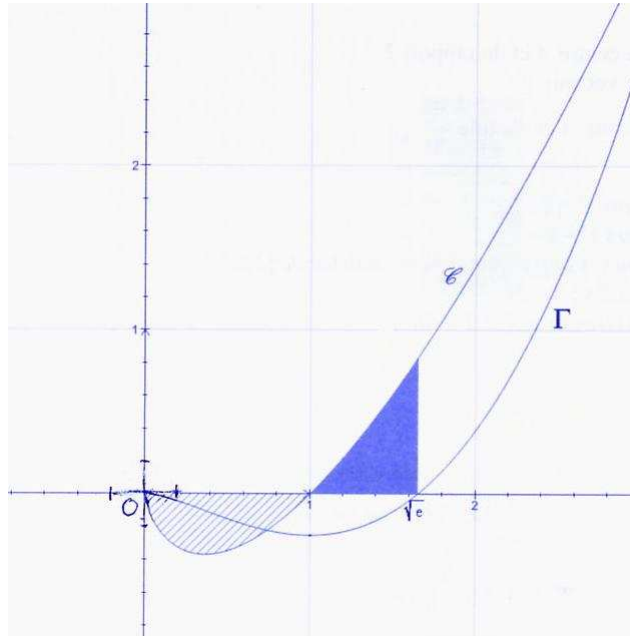
On désigne par :

- _ (E) l'ensemble des points M d'affixes z telles que $|z - 2i| = |z - 1|$;
- _ (F) l'ensemble des points M , distincts de A et B , d'affixes z telles que $\arg\left(\frac{z - 2i}{z - 1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,
avec $k \in \mathbb{Z}$.

- a) (E) est un cercle.
- b) Les points M de (F) décrivent un cercle sauf deux points.
- c) Le point C d'affixe $\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$ appartient à (E) et à (F) .
- d) (F) est aussi l'ensemble des points M tels que le complexe $Z = \frac{z - 2i}{z - 1}$ soit un nombre imaginaire pur.

Exercice 4

On donne les deux courbes \mathcal{C} et Γ ci dessous.



L'une de ces courbes représente une fonction f définie et continue sur $[0; +\infty[$ l'autre représente une primitive F de f sur $[0; +\infty[$.

On admettra sur Γ possède l'axe des abscisses pour tangente en $O(0,0)$ et que \mathcal{C} possède l'axe des ordonnées pour tangente en ce même point.

a) Γ est la courbe qui représente f .

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt$.

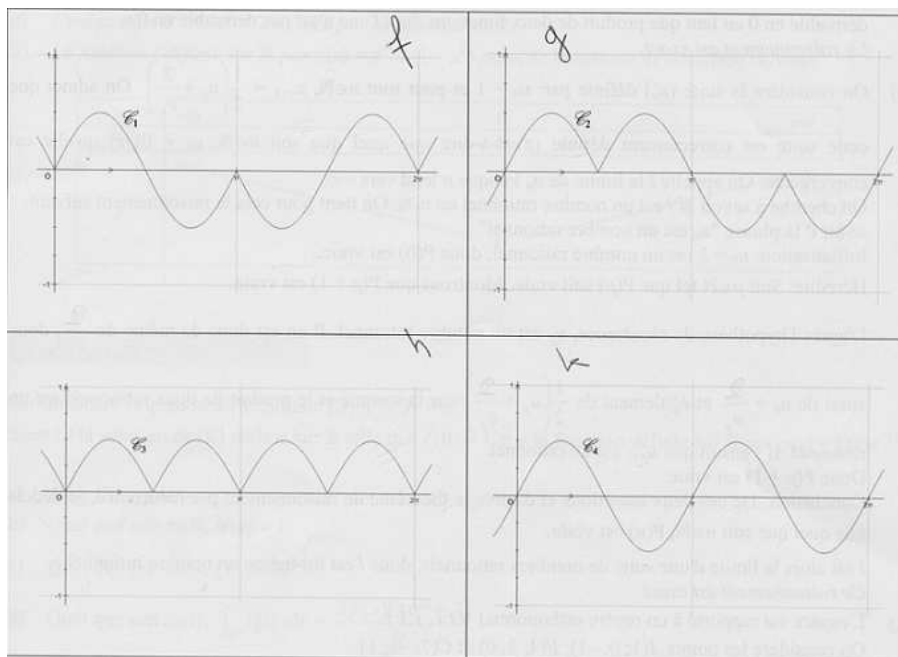
c) L'aire de la surface hachurée est la même que celle de la surface grisée.

d) F est deux fois dérivable en 0 et $F''(0) = 0$.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère quatre fonctions f, g, h et k définies sur \mathbb{R} . On appelle respectivement $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et \mathcal{C}_4 les quatre courbes représentant chacune de ces fonctions.



- Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x - \frac{\pi}{2}) = f(x)$.
- Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = |k(x)|$.
- Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) + h(x) - k(x) = 0$.
- \mathcal{C}_4 représente la fonction qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $\sin(\frac{x}{2})$.

Exercice 6

a) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

On cherche à savoir si f est dérivable en 0 ou non. On tient pour cela le raisonnement suivant :
 « f est le produit de la fonction $x \mapsto x$ avec la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Ces deux fonctions sont définies continues $[0; +\infty[$, mais la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Il s'ensuit que f n'est pas dérivable en 0 en tant que produit de deux fonctions dont l'une n'est pas dérivable en 0. »

Ce raisonnement est exact.

b) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$. On admet que cette suite est correctement définie (c'est-à-dire que quel que soit $x \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$) et qu'elle est convergente. On appelle l la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On cherche à savoir si l est un nombre rationnel ou non.

On tient pour cela le raisonnement suivant :

« Soit P la phrase " u_n est un nombre rationnel".

Initialisation : $u_0 = 1$ est un nombre rationnel donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $P(p)$ soit vraie. Montrons que $P(p+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, u_p est un nombre rationnel. Il en est donc de même de $\frac{2}{u_p}$,

donc aussi de $u_p + \frac{2}{u_p}$ et également de $\frac{1}{2}(u_p + \frac{2}{u_p})$ car la somme et le produit de deux rationnels est un rationnel. Il s'ensuit que u_{p+1} est rationnel.

Donc $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion : De ces deux assertions et d'après le théorème de raisonnement par récurrence, je déduis que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

l est alors la limite d'une suite de nombres rationnels, donc l est lui même un nombre rationnel. »

Ce raisonnement est exact.

c) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A , B et C déterminent un plan.

On tient pour cela le raisonnement suivant :

« On a $\overrightarrow{AB}(3; 3; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(6; -6; 2)$. Il s'ensuit : $AB = \sqrt{19}$, $AC = \sqrt{41}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 17$.

Comme $AB \times AC \neq |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|$, c'est que les points A , B et C ne sont pas alignés et donc qu'ils déterminent un plan. »

Ce raisonnement est exact.

d) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = E(\sin x)$ (E désigne la fonction "partie entière"). On cherche la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est définie dans le voisinage de 0. On utilise le changement de variable $X = \sin x$: on sait que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

donc

$$\lim_{X \rightarrow 0} X = 0$$

Par suite, et d'après le théorème de composition des limites, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} E(X) = 0$$

f a pour limite 0 au voisinage de 0. »

Ce raisonnement est exact.

Exercice 7

a)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x \ln(1+x) - 2 \ln x}{x^2} = 1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

c) L'inéquation $e^{2x} + 3e^x + 2 \leq 0$ n'a pas de solution réelle.d) La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x} \ln(1+x^2)$ possède le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

Exercice 8On considère l'équation différentielle $[E] : y' - 3y = e^{3x}$ Soient f la solution de $[E]$ définie sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$ et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x)e^{-3x}$.a) On a $f'(0) = 4$.b) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1$.c) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{3x}$.d) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt = \frac{3f(x) - e^{3x} - 2}{9}$.**Exercice 9**On définit la suite (I_n) pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \int_1^e \frac{\ln x}{x^n} \cdot dx$ a) $I_1 = \frac{1}{2}$.b) La suite (I_n) est croissante.c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{e^{n-1}}\right)$.d) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, une intégration par parties sur I_n donne $(n-1)^2 I_n = 1 - ne^{1-n}$.

Exercice 10

On considère les trois suites u , v et w , définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad w_n = v_n - u_n$$

- La suite w est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
- La suite u est croissante.
- Les suites u et v sont convergentes.
- Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \in [u_n; v_n]$.

Exercice 11

On considère les suites u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{-2}{u_n - 3} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

- Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $1 < u_n < 2$.
- La suite u est convergente.
- v est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 1 + \frac{1}{1 + 2^n}$.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = x^{n-1} \ln x$. On appellera \mathcal{C}_n la courbe représentant le fonction f_n dans un repère du plan.

- Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, les courbes \mathcal{C}_n possèdent l'axe des ordonnées pour asymptote.
- Soit $x \in]0; 1[$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty.$$

- Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, les courbes \mathcal{C}_n possèdent une tangente commune au point d'abscisse 1.
- Soient $x \in]1; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On a

$$\sum_{k=2}^n f_k(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x} \times \ln x.$$

Exercice 13

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune n boules blanches et n boules noires. On jette un dé cubique équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

Si le résultat est pair, on prélève successivement au hasard avec remise intermédiaire, deux boules de U_1 .

Si le résultat est impaire, on prélève au hasard, successivement sans remise intermédiaire, deux boules de U_2 ;

On appelle N l'évènement : "obtenir deux boules noires".

On désigne par :

– $p(N)$ la probabilité de l'évènement N ,

– $p_{U_1}(N)$ la probabilité d'obtenir l'évènement N sachant que les deux boules tirées viennent de U_1 ,

– $p_{U_2}(N)$ la probabilité d'obtenir l'évènement N sachant que les deux boules tirées viennent de U_2 ,

a) La probabilité d'obtenir deux boules noires de U_1 est $\frac{1}{8}$.

b) Pour tout entier n , $n \geq 2$, on a $p_{U_1}(N) = p_{U_2}(N)$.

c)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{U_1}(N) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{U_2}(N).$$

d) Pour tout entier n , $n \geq 2$, on a $p(N) = \frac{4n - 3}{8(2n - 1)}$.

Exercice 14

Une usine fabrique des détecteurs de fumée. Ces détecteurs disposent chacun d'une durée de vie aléatoire (en mois), représentée par une variable aléatoire T .

Cette variable suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ , où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ dont la loi de densité est la fonction f_λ définie par :

$$f_\lambda(t) = 0 \text{ pour } t \leq 0 \text{ et } f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ pour tout } t > 0.$$

Les tests indiquent qu'un détecteur de fumée a une chance sur 2 de tomber en panne à la fin de son premier mois de fonctionnement. En cas de panne, le détecteur défaillant est immédiatement remplacé par un détecteur neuf. Un contrôle est effectué chaque mois après l'installation du premier détecteur.

On admet que le fonctionnement des détecteurs est indépendant d'un détecteur à un autre.

On désire équiper une petite salle avec l'un de ces détecteurs de fumée.

a) $\lambda = \ln 2$

b) La probabilité de changer au moins une fois le détecteur lors des deux premiers contrôles est égale à 1.

c) La probabilité de changer le détecteur une fois et une seule lors de l'un des cinq premiers contrôles est de $\frac{5}{32}$.

d) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la probabilité que le détecteur ne soit pas changé lors des n premiers contrôles est de $\frac{1}{2^n}$.

Exercice 15

L'espace est rapporté un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1; 2; 4)$, $B(0; -2; 3)$, $C(7; 1; -1)$ et $D(-2; -2; -13)$.

On appelle (P) le plan médiateur de $[AB]$, c'est-à-dire le plan contenant les points équidistants de A et B ou aussi le plan perpendiculaire à (AB) contenant le milieu de $[AB]$.

On appelle (Q) le plan médiateur de $[AC]$.

- Le vecteur de coordonnées $(8; -1; -5)$ est normal à (Q) .
- Le plan (P) a pour équation $x + 4y + z + 4 = 0$.
- A , B , et C appartiennent à une même sphère de centre $\Omega(-1; 2; -5)$.
- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

Exercice 16

L'espace est rapporté un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les ensembles (P) , (Q) et (R) d'équations respectives :

$$(P) : x + y = 0 \quad (Q) : 2x - y - z - 1 = 0 \quad (R) : z = 1.$$

- (P) est une droite.
- L'ensemble des points appartenant à la fois à (P) et à (R) est une droite.
- (P) et (Q) sont perpendiculaires.
- (P) , (Q) et (R) se coupent au point $A(\frac{2}{3}; \frac{-2}{3}; 1)$.