Ch. 2 - De la résolution des équations du premier degré

2.1. (566) Lorsque le nombre cherché ou inconnu est indiqué par la lettre x, et que l'équation qu'on a obtenue est telle que l'un de ses membres renferme simplement x, et l'autre seulement un nombre connu, comme par exemple $x = 25$, la valeur cherchée de x est toute trouvée. C'est donc à parvenir à une telle forme qu'il faut toujours faire ses efforts, quelque compliquée que soit l'équation qu'on a trouvée d'abord. Nous donnerons dans la suite les règles qui rendent ces réductions plus faciles.

2.2. (567) Commençons par les cas les plus simples, et supposons d'abord qu'on soit parvenu à l'équation

$$x + 9 = 16,$$

on voit sur-le-champ que

$$x = 7.$$

Et en général, si on a trouvé

$$x + a = b,$$

où a et b signifient des nombres quelconques, mais connus, on n'a qu'à soustraire a de l'un et de l'autre membre, et on obtient l'équation

$$x = b - a,$$

qui indique la valeur de x.

2.3. (568) Si l'équation primitive a cette forme

$$x - a + b = c,$$

on peut commencer par ajouter de part et d'autre a, on aura

$$x + b = c + a\,;$$

et en soustrayant b des deux côtés, on trouvera

$$x = c + a - b.$$

Mais on peut aussi ajouter $+a - b$ de part et d'autre ; on obtient par-là sur-le-champ

$$x = c + a - b.$$

Ainsi de

$$\begin{array}{rcl} x - 2a + 3b = 0 & \text{on déduit} & x = 2a - 3b, \\ x - 3a + 2b = 25 + a + 2b & & x = 25 + 4a, \\ x - 9 + 6a = 25 + 2a & & x = 34 - 4a. \end{array}$$

2.4. (569) Quand l'equation trouvée est de la forme

$$a\,x = b,$$

on divise les deux membres par a, et on a

$$x = \frac{b}{a}.$$

Mais si l'équation est

$$a\,x + b - c = d,$$

il faudra d'abord faire disparaître les termes qui accompagnent $a\,x$, en ajoutant de part et d'autre $b + c$; et après cela, en divisant par a la nouvelle équation

$$a\,x = d - b + c,$$

on aura

$$x = \frac{d - b + c}{a}.$$

On aurait trouvé la même chose en soustrayant $+b - c$ de l'équation donnée ; on aurait eu pareillement

$$a\,x = d - b + c, \text{ et } x = \frac{d - b + c}{a}.$$

En conséquence de cela,

si	$2x + 5 = 17$	on a	$2x = 12$	et	$x = 6$
	$3x - 8 = 7$		$3x = 15$		$x = 5$
	$4x - 5 - 3a = 15 + 9a$		$4x = 20 + 12a$		$x = 5 + 3a.$

2.5. (570) Quand la première équation aura la forme

$$\frac{x}{a} = b,$$

on multipliera des deux côtés par a, pour avoir

$$x = ab.$$

Mais si l'on a

$$\frac{x}{a} + b - c = d,$$

il faudra d'abord faire

$$\frac{x}{a} = d - b + c,$$

après quoi on obtiendra

$$x = (d - b + c)a = ad - ab + ac.$$

Soit $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, on a $\frac{1}{2}x = 7$ et $x = 14$.

Soit

$$\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3 + a,$$

on aura

$$\frac{1}{3}x = 4 - a, \text{ et } x = 12 - 3a.$$

Soit $\frac{x}{a-1} - 1 = a$, on aura $\frac{x}{a-1} = a + 1$, et* $x = a^2 - 1$. * Euler note aa

2.6. (571) Quand on est parvenu à une équation, telle que

$$\frac{ax}{b} = c,$$

on multiplie d'abord par b, afin d'avoir

$$ax = bc,$$

et divisant ensuite par a, on trouve

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Que si

$$\frac{ax}{b} - c = d,$$

on commencerait par donner à l'équation cette forme

$$\frac{ax}{b} = d + c,$$

après quoi on parviendrait à

$$ax = bd + bc, \text{ et à } x = \frac{bd + bc}{a}.$$

Supposons

$$\frac{2}{3}x - 4 = 1,$$

nous aurons

$$\frac{2}{3}x = 5,\ \text{et}\ 2x = 15\,;\ \text{donc}\ x = \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}\,^*.$$

* Euler note $7\frac{1}{2}$

Si

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5,$$

nous aurons

$$\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\,;\ \text{donc}\ 3x = 18,\ \text{et}\ x = 6.$$

2.7. (572) Considérons à présent le cas qui peut arriver fréquemment, où deux ou plusieurs termes contiennent la lettre x, soit dans un seul membre de l'équation, soit dans tous les deux.

Si ces termes sont tous du même côté, c'est-à-dire dans un seul membre, comme dans l'équation

$$x + \frac{1}{2}x + 5 = 11,$$

on a

$$x + \frac{1}{2}x = 6,\ \text{et}\ 3x = 12,\ \text{et enfin}\ x = 4.$$

Soit

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44,$$

et qu'on demande la valeur de x : si on multiplie d'abord par 3, on a

$$4x + \frac{3}{2}x = 132\,;$$

multipliant ensuite par 2, on a

$$11x = 264\,;\ \text{donc}\ x = 24.$$

On aurait pu procéder plus brièvement, en commençant par réduire les trois termes qui renferment x, au seul terme $\frac{11}{6}x$; et divisant ensuite par 11 l'équation

$$\frac{11}{6}x = 44,$$

on aurait eu

$$\frac{1}{6}x = 4, \text{ donc } x = 24.$$

Soit

$$\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 1,$$

on aura, en réduisant,

$$\frac{5}{12}x = 1, \text{ et } x = 2 + \frac{2}{5}.$$

Soit plus généralement,

$$ax - bx + cx = d,$$

c'est comme si on avait

$$(a - b + c)x = d, \text{ d'où } x = \frac{d}{a - b + c}.$$

2.8. (573) Lorsqu'il se trouve des termes renfermant x dans l'un et l'autre membre de l'équation, on commencera par faire disparaître ces termes du côté où cela est le plus facile, c'est-à-dire où il y en a le moins. Si on a, par exemple, l'équation

$$3x + 2 = x + 10\,;$$

il faudra soustraire x des deux côtés, on aura

$$2x + 2 = 10\,; \text{ donc } 2x = 8, \text{ et } x = 4.$$

Qu'on ait

$$x + 4 = 10 - x\,;$$

il est clair que

$$2x + 4 = 10\,;\ \text{donc}\ 2x = 16,\ \text{et}\ x = 8.$$

Soit

$$x + 8 = 32 - 3x,$$

on aura

$$4x + 8 = 32\,;\ \text{puis}\ 4x = 24,\ \text{et}\ x = 6.$$

Soit

$$15 - x = 20 - 2x,$$

on aura

$$15 + x = 20,\ \text{et}\ x = 5.$$

Soit

$$1 + x = 5 - \frac{1}{2}x,$$

on aura

$$1 + \frac{3}{2}x = 5\ ;\quad \text{puis}\ \frac{3}{2}x = 4\ ;\ 3x = 8\ ;\quad \text{enfin}\ x = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}.$$

Si

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

on ajoutera $\frac{1}{3}x$, ce qui donne

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}x$$

soustrayant $\frac{1}{3}$, il reste

$$\frac{1}{12}x = \frac{1}{6}$$

et multipliant par 12, on obtient

$$x = 2.$$

Si

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\,;$$

on ajoute $\frac{2}{3}x$, ce qui donne

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{7}{6}x\,;$$

soustrayant $\frac{1}{4}$, on a

$$\frac{7}{6}x = 1 + \frac{1}{4},\ \text{d'où } x = \frac{30}{28} = 1 + \frac{1}{14}$$

en multipliant par 6, et en divisant par 7.

2.9. (574) Si on est parvenu à une équation où le nombre inconnu x est en dénominateur, il faut faire disparaître la fraction, en multipliant toute l'équation par ce dénominateur.
Supposons qu'on ait trouvé

$$\frac{100}{x} - 8 = 12,$$

on ajoutera d'abord 8, et on aura

$$\frac{100}{x} = 20\,;$$

multipliant ensuite par x, on a

$$100 = 20x$$

et divisant par 20, on trouve

$$x = 5.$$

Soit

$$\frac{5x+3}{x-1} = 7.$$

Si on multiplie par $x - 1$, on a

$$5x + 3 = 7x - 7.$$

Soustrayant $5x$, il reste

$$3 = 2x - 7.$$

Ajoutant 7, il vient

$$2x = 10\,; \text{ d'où } x = 5.$$

2.10. (575) Quelquefois aussi on rencontre des signes radicaux et l'équation ne laisse pas d'appartenir au premier degré. Par exemple, on cherche un nombre x au-dessous de 100, et tel que la racine carrée de $100 - x$ devienne égale à 8, ou

$$\sqrt{100 - x} = 8\,;$$

on prendra des deux côtés le carré, ce qui donne,

$$100 - x = 64,$$

et en ajoutant x, on aura

$$100 = 64 + x\,;$$

d'où

$$x = 100 - 64 = 36.$$

On pourrait aussi, puisque $100 - x = 64$, soustraire 100 de l'un et de l'autre membre ; on aurait

$$-x = -36,$$

et en multipliant par -1,

$$x = 36.$$

2.11. (576) Quelquefois enfin, le nombre inconnu x se trouve dans l'exposant, nous en avons vu des exemples plushaut, et il faut alors avoir recours aux logarithmes.
Ainsi, quand on a

$$2^x = 512,$$

on prend des deux côtés les logarithmes ; on a

* Euler note L

$$x \ln 2 = \ln 512^{\,*}\,;$$

et en divisant par $\ln 2$, on trouve

$$x = \frac{\ln 512}{\ln 2}$$

Les tables donneront donc

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300} = \frac{270927}{30103} = 9.$$

Soit

$$5 \cdot 3^{2x} - 100 = 305,$$

on ajoutera 100 ; cela fait

$$5 \cdot 3^{2x} = 405\,;$$

divisant par 5, on a

$$3^{2x} = 81\,;$$

prenant les logarithmes

$$2x \ln 3 = \ln 81\,;$$

et divisant par $2 \ln 3$, on a

$$x = \frac{\ln 81}{2 \ln 3} = \frac{\ln 81}{\ln 9}\,;$$

donc

$$x = \frac{1,908450}{0,9542425} = \frac{19084850}{9542425} = 2.$$