Équations du troisième degré

par Z, auctore

L'objet de cet article est d'exposer deux méthodes pour trouver des solutions à une équation du troisième degré : la recherche de racines évidentes d'une part, et la formule de Cardan d'autre part. La première méthode est accessible en 1re S, la deuxième concerne davantage la Terminale S.

1. Recherche de racines évidentes. Dans cette section, on traite trois exemples d'équations du troisième degré sans utiliser de formule spéciale pour en trouver les solutions. C'est en remarquant que, si le nombre u est solution de $a_n\,x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, alors on en déduit

$$u(a_n\,u^{n-1} + \cdots + a_1) = -a_0.$$

Si les coefficients a_n, … ,a_0 et u sont des nombes entiers, cela signifie que u est un diviseur du *terme constant* a_0. Donc si une équation polynomiale à coefficients entiers possède des solutions en nombres entiers, celles-ci sont à chercher parmi les diviseurs du terme constant du polynôme.

Exemple 1. Soit l'équation

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0, \tag{1}$$

dont on cherche toutes les solutions réelles. On pose

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10.$$

Le problème consiste à trouver toutes les racines, s'il en existe, du polynôme P, qui est du troisième degré. La première des choses à faire est de procéder à des essais numériques : c'est la recherche de *racines évidentes*. Les racines en nombres entiers d'une équation unitaire sont à chercher parmi les diviseurs du *terme constant*, ici 10. Il est donc inutile de tester des valeurs comme 3 ou 4, puisque les seules possibilités en nombres entiers sont

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 5 \text{ et } \pm 10.$$

On constate en substituant, que l'on a seulement

$$P(1) = P(-2) = P(5) = 0.$$

Les nombres 1, -2 et 5 sont donc des racines de P c'est-à-dire des solutions de l'équation $P(x) = 0$. Le théorème de factorisation[1] des polynômes montre que l'on a

$$\boxed{P(x) = (x-1)(x+2)(x-5).}$$

1. Un nombre u est racine d'un polynôme f lorsqu'un autre polynôme g permet d'écrire

$$f(x) = (x-u)g(x).$$

Donc la liste de *toutes* les solutions de l'équation $P(x) = 0$ est $\{-2\,;\,1\,;\,5\}$.

Exemple 2. Soit l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0, \tag{2}$$

dont on cherche toutes les solutions. Pour cela, on pose

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4.$$

Les racines évidentes, s'il en existe, sont à chercher parmi les diviseurs de 4, c'est-à-dire

$$\pm 1,\ \pm 2 \text{ et } \pm 4.$$

On constate que seulement $Q(4) = 0$, donc $Q(x)$ peut être factorisé par $(x-4)$. Il s'agit donc de trouver des nombres p et q tels que

$$Q(x) = (x-4)(x^2 + px + q).$$

En développant ce produit, on obtient

$$Q(x) = x^3 + (p-4)x^2 + (q-4p)x - 4q.$$

Alors, puisque l'on doit avoir l'identité

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = x^3 + (p-4)x^2 + (q-4p)x - 4q,$$

on est conduit à poser $-4q = -4$ et $p - 4 = -6$, soit $q = -1$ et $p = -2$. Il reste à vérifier que cette *identification des coefficients* est valable : en développant, on constate que

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = (x-4)(x^2 - 2x - 1).$$

Pour trouver les autres solutions, s'il y en a, il suffit de résoudre l'équation

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times -1 = 8$, d'où les racines de $x^2 - 2x - 1$; ce sont

$$x' = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x'' = 1 - \sqrt{2}.$$

La liste de toutes les solutions de l'équations $Q(x) = 0$ est donc

$$\{1 - \sqrt{2}\,;\, 1 + \sqrt{2}\,;\, 4\},$$

et on a la factorisation

$$\boxed{Q(x) = (x-4)(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})}$$

Exemple 3. Soit l'équation

$$x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0, \tag{3}$$

dont on cherche toutes les solutions. On pose

$$R(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6.$$

Une racine évidente de R est à chercher parmi les nombres

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3 \text{ et } \pm 6.$$

On constate que seulement $R(-3) = 0$. Donc le polynôme R est factorisable par $(x+3)$ et on doit trouver m et n tels que

$$x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x+3)(x^2 + mx + n).$$

En développant et en identifiant les coefficients, on obtient $m = -2$ et $n = 2$. On vérifie que l'on a bien l'identité

$$x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x+3)(x^2 - 2x + 2).$$

Or, pour résoudre $x^2 - 2x + 2 = 0$, on obtient un discriminant négatif

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4.$$

Ceci montre que le polynôme $x^2 - 2x + 2$ ne possède pas de racine et donc le polynôme R ne peut pas avoir d'autre racine que la valeur -3.
En conclusion, l'équation (3) possède une unique solution égale à -3 et on a la factorisation

$$\boxed{x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x+3)(x^2 - 2x + 2)}$$

2. Formule de Cardan.

Au XVI^e siècle, des algébristes italiens ont découvert une méthode pour calculer *une* racine d'un polynôme de degré 3 donné sous la forme *réduite*

$$x^3 + p\,x + q = 0, \tag{4}$$

où p et q sont des paramètres quelconques. La propriété (triviale) suivante est un lemme nécessaire à cette résolution.

Propriété 1. *Pour tous nombres u et v, on a*

$$(u+v)^3 - 3\,u\,v(u+v) - (u^3 + v^3) = 0. \tag{5}$$

La preuve résulte du développement remarquable bien connu

$$(u+v)^3 = u^3 + 3\,u^2 v + 3\,u\,v^2 + v^3$$

que l'on ré-arrange sous la forme attendue.

L'observation de la relation (5), **semblable à la forme réduite** (4) montre qu'il est pertinent de faire le changement de variable

$$x = u + v. \tag{6}$$

Alors l'identification des coefficients dans

$$x^3 + p\,x + q = (u+v)^3 - 3\,u\,v(u+v) - (u^3+v^3)$$

conduit à poser

$$p = -3\,u\,v \quad \text{et} \quad q = -(u^3+v^3),$$

c'est-à-dire

$$u\,v = -\frac{p}{3} \quad \text{et} \quad u^3+v^3 = -q.$$

Pour une question d'homogénéité, on écrit plutôt

$$u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \quad \text{et} \quad u^3+v^3 = -q. \tag{7}$$

Pour y voir plus clair, posons

$$a = u^3 \qquad \text{et} \qquad b = v^3.$$

Alors les conditions (7) s'écrivent

$$a\,b = \frac{-p^3}{27} \quad \text{et} \quad a+b = -q. \tag{8}$$

Autrement dit, il s'agit de trouver deux nombres a et b connaissant leur somme $S = -q$ et leur produit $P = -p^3/27$. On sait que ceci n'est possible[2] que sous la condition

$$S^2 - 4P \geq 0, \quad \text{c'est-à-dire, ici} \quad q^2 + \frac{4\,p^3}{27} \geq 0$$

ce qui s'écrit finalement

$$4\,p^3 + 27\,q^2 \geq 0. \tag{9}$$

Dans **ce** cas, les nombres a et b sont les solutions de l'équation

$$X^2 + q\,X - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{10}$$

2. On rappelle que a et b sont solutions, si elles existent, de l'équation $X^2 - S\,x + P = 0$, dont le discriminant est

$$\Delta = S^2 - 4\,P.$$

Les solutions de cette équation sont données par

$$X = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4\,p^3}{27}}}{2}$$

donc on a par exemple

$$a = \frac{-q - \sqrt{\frac{27\,q^2+4\,p^3}{27}}}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-q + \sqrt{\frac{27\,q^2+4\,p^3}{27}}}{2}.$$

Puisque $a = u^3$ et $b = v^3$, et puisque $x = u + v$, on en déduit que le nombre donné par

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27\,q^2 + 4\,p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27\,q^2 + 4\,p^3}{27}}} \tag{11}$$

donne une solution de l'équation (4). Cette expression est la **formule de Cardan**. Ce nom lui est resté attaché bien que Cardan n'en soit pas le découvreur.[3] Elle donne en fonction des coefficients une solution particulière sous une forme bien peu maniable, mais on peut malgré tout énoncer

Théorème 1. *Soit une équation cubique sous la forme réduite*

$$x^3 + p\,x + q = 0.$$

Si l'on a $4\,p^3 + 27\,q^2 \geq 0$*, alors une solution particulière est donnée par*

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4\,p^3+27\,q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4\,p^3+27\,q^2}{27}}}}$$

Cette formule permet de calculer une solution de l'équation, dans le cas où il n'y a pas de racine évidente. Par exemple, aucun des diviseurs ± 1, ± 2 du terme constant de l'équation

$$x^3 + 3\,x + 2 = 0 \tag{12}$$

n'en étant solution, on calcule

$$4\,p^3 + 27\,q^2 = 4 \times 27 + 27 \times 4 = 216$$

d'où la solution particulière

$$x = \sqrt[3]{-1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{-1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{216}{27}}} \simeq -0,59607\ldots$$

3. Pour autant que je sache, c'est d'abord **Scipio del Ferro** qui l'a trouvée dans des cas particuliers, puis **Niccolo Tartaglia** l'a re-découverte. Cardan a eu le mérite de la faire connaître, à une époque où les découvertes scientifiques restaient généralement secrètes.

Voici une autre équation, sans racine évidente, que l'on peut « résoudre » à l'aide de cette formule

$$x^3 + 3\,x + 5 = 0. \tag{13}$$

Lorsque l'équation n'est pas donnée sous la forme réduite, on est en présence d'une équation cubique sous forme générale

$$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0. \tag{14}$$

On peut toujours la ramener à une équation sous la forme réduite, en commençant par diviser par a, ce qui donne

$$x^3 + \beta\,x^2 + \gamma\,x + \delta = 0 \tag{15}$$

puis on supprime le *terme carré* au moyen de la transformation de **Tchirnhaus**, en posant

$$x = X - \frac{\beta}{3} \tag{16}$$

En effet, on a d'une part

$$\left(X - \frac{\beta}{3}\right)^3 = X^3 - 3\,\frac{\beta}{3}\,X^2 + \cdots = X^3 - \beta\,X^2 + \cdots$$

et d'autre part

$$\beta\left(X - \frac{\beta}{3}\right)^2 = \beta\,X^2 + \cdots$$

ce qui montre que ce changement de variable élimine le terme en X^2.

3. Extension au cas « irréductible ».

On a vu que la formule de Cardan permet de trouver une solution d'une équation sous forme réduite

$$x^3 + p\,x + q = 0$$

dans le cas où

$$4\,p^3 + 27\,q^2 \geq 0.$$

Bombelli a étudié l'équation

$$x^3 - 15\,x - 4 = 0 \tag{17}$$

qui possède une *racine évidente*, égale à 4, puisque l'on a

$$4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0.$$

On a ainsi la factorisation

$$x^3 - 15\,x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4\,x + 1)$$

où le trinôme $x^2 + 4\,x + 1$ a deux racines conjuguées données par

$$x = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Or, en menant les calculs comme précédemment, avec

$$4 \times (-15)^3 + 27 \times (-4)^2 = -13068 < 0,$$

et en appliquant *malgré tout* la formule de Cardan, on obtient

$$x = \sqrt[3]{2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-13608}{27}}} + \sqrt[3]{2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-13068}{27}}}$$

où figurent des **racines carrées de nombres négatifs**... mais en continuant comme si de rien n'était, on obtient

$$x = \sqrt[3]{2 - \frac{1}{2}\sqrt{-484}} + \sqrt[3]{2 + \frac{1}{2}\sqrt{-484}}$$

ou bien encore

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

que l'on peut même[4] aller jusqu'à écrire

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}.$$

Par un moyen qui lui est propre, Bombelli s'est aperçu que

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1},$$

ce dont on peut constater la justesse en calculant leurs cubes...
Ainsi, Bombelli a pu montrer dans ce cas qu'en passant outre la question des racines carrées de nombres négatifs, la formule de Cardan qui s'écrit

$$x = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4,$$

donne encore une racine de l'équation du 3$^{\text{e}}$ degré.
C'est à la suite de calculs de ce genre que les *nombres complexes* ont fait leur apparition, en acceptant l'existence de règles de calcul concernant le nombre « imaginaire »

$$i = \sqrt{-1}.$$

En application de la formule de Cardan, on peut toujours essayer de résoudre cette équation

$$x^3 - 18\,x + 35 = 0 \tag{18}$$

sans passer par les racines évidentes. Ou bien encore celle-ci

$$x^3 - 14\,x - 12 = 0. \tag{19}$$

qui figurait parmi les questions auxquelles Einstein a répondu à l'occasion de l'épreuve d'algèbre de son baccalauréat en 1896.

4. Bien entendu, l'élève de Première ne s'amusera pas à ce genre de chose - il attendra d'être en Terminale pour cela !