

Équations à une inconnue en 3^e

par Z, auctore

1. Premier degré. En classe de 4^e, on a appris à résoudre un certain nombre d'équations. Dans cette section, on rappelle une méthode de résolution. Elle consiste essentiellement en *l'élimination* d'un terme constant ou d'un terme en x .

Avec l'inconnue dans un seul membre. L'équation

$$(1) \quad 2x - 3 = 0$$

est résolue de la façon suivante

$$\begin{aligned} 2x - 3 + 3 &= 0 + 3 \\ 2x &= 3 \\ 2 \times x/2 &= 3/2 \\ x &= 1,5. \end{aligned}$$

C'est le « bon sens » qui doit guider le choix des opérations, notamment pour la question de la *division finale* : on divise par le coefficient qui figure devant l'inconnue x ; c'est la raison pour laquelle on a divisé par 2.

L'équation

$$(2) \quad 4x + 5 = 0$$

est résolue de la façon suivante

$$\begin{aligned} 4x + 5 - 5 &= 0 - 5 \\ 4x &= -5 \\ 4x/4 &= -5/4 \\ x &= -1,25. \end{aligned}$$

L'équation

$$(3) \quad 5x - 3 = 14$$

est résolue de la façon suivante

$$\begin{aligned} 5x - 3 + 3 &= 14 + 3 \\ 5x &= 17 \\ 5x/5 &= 17/5 \\ x &= 3,4. \end{aligned}$$

De façon générale, ce genre de résolution s'achève toujours par une division ; on donnera donc de préférence la solution sous la forme d'une fraction (simplifiée), notamment lorsque la division « ne tombe pas juste ». Dans ce cas, on ne donne qu'une valeur approchée décimale - en donnant la précision de celle-ci. Par exemple, l'équation

$$(4) \quad 7x + 4 = -6$$

est résolue ainsi

$$\begin{aligned} 7x + 4 - 4 &= -6 - 4 \\ 7x &= -10 \\ 7x/7 &= -10/7 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $x = \frac{-10}{7}$, ce qui est la valeur exacte de la solution, et $x \simeq -1,43$ qui en est l'arrondi à 0,01 près.

Avec l'inconnue dans les deux membres. L'équation

$$(5) \quad 5x - 12 = 3x + 8$$

est résolue de la façon suivante

$$\begin{aligned} 5x - 3x - 12 &= 3x - 3x + 8 \\ 2x - 12 &= 8 \\ 2x - 12 + 12 &= 8 + 12 \\ 2x &= 20 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

L'équation

$$(6) \quad 2x - 9 = 7x + 1$$

est résolue ainsi

$$\begin{aligned} 2x - 2x - 9 &= 7x - 2x + 1 \\ -9 &= 5x + 1 \\ -9 - 1 &= 5x + 1 - 1 \\ -10 &= 5x \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes

$$(7) \quad 6x + 25 = 28$$

$$(8) \quad 7x - 2 = 2x - 18$$

$$(9) \quad 40x + 9 = 50x - 5$$

2. Equations du type produit-nul.

Propriété de la multiplication. Soient P et Q deux nombres. Si P ou Q est égal à 0, alors le produit $P \times Q$ est lui-aussi égal à 0. Inversement, si ni P ni Q n'est nul, alors leur produit $P \times Q$ ne peut être égal à 0. On retiendra

Propriété 1. Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs soit nul. C'est-à-dire

$$P \times Q = 0 \quad \text{équivaut à} \quad P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0$$

Application à un type particulier d'équation. Soit l'équation

$$(10) \quad (x + 1) \times (x - 2) = 0.$$

C'est un produit de deux facteurs, dont le résultat doit être 0; on dit que c'est une *équation du type « produit-nul »*. La propriété précédente conduit à écrire l'alternative

$$x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0 \\ x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

L'équation (10) admet deux solutions; ce sont les nombres -1 et 2 .

Pour résoudre une équation donnée sous la forme d'un produit nul, il suffit de résoudre chacune des équations formées en égalant chaque facteur à 0. Par exemple, l'équation

$$(11) \quad 5x(2x + 1)(3 - x) = 0$$

est du type *produit-nul*. Elle équivaut à

$$5x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 3 - x = 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

L'équation (11) admet donc trois solutions; ce sont les nombres $-\frac{1}{2}$, 0 et 3 .

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes

$$(12) \quad 3x(5 - 2x) = 0$$

$$(13) \quad (10x + 8)(2x + 6) = 0$$

$$(14) \quad 25(2x - 1)(3x - 8) = 0$$

$$(15) \quad x(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) = 0$$

Remarques. Lorsqu'on développe les membres de gauche des équations (10) et (11), on obtient une expression du second degré

$$(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$$

ainsi qu'une expression du troisième degré

$$5x(2x + 1)(3 - x) = -10x^3 + 25x^2 + 15x.$$

Si l'on avait voulu résoudre les équations avec le membre de gauche sous forme développée (du deuxième ou troisième degré), on aurait sans doute rencontré des difficultés... Il existe des méthodes de résolution systématique de ce genre d'équation. On en verra un exemple en fin de chapitre.

3. Factorisation. Le principe du *produit-nul* permet de résoudre facilement des équations dès que l'on a écrit l'expression donnée sous la forme d'un produit de facteurs : c'est la *factorisation*, qui consiste à transformer de façon licite une forme développée en une forme factorisée. Il est donc important d'acquérir des méthodes pour obtenir des formes factorisées.

Avec un facteur commun. La distributivité « lue dans le sens inverse »

$$m \times a + m \times b = m(a + b)$$

permet de transformer certaines sommes en produits. Ce faisant, on dit que l'on met la quantité m en facteur. Par exemple,

$$\begin{aligned} 2x(x + 1) + 2x(x + 2) &= 2x((x + 1) + (x + 2)) \\ &= 2x(2x + 3) \end{aligned}$$

puisque $2x$ était facteur commun des termes de la somme initiale. De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} 2x(x + 1) + 6x &= 2x(x + 1) + 2x \times 3 \\ &= 2x((x + 1) + 3) \\ &= 2x(x + 4). \end{aligned}$$

Ici, il a fallu légèrement *forcer* l'apparition du facteur commun. Voici un autre exemple

$$\begin{aligned} (2x + 3)(x + 1) + (2x + 3)(x - 5) &= (2x + 3)((x + 1) + (x - 5)) \\ &= (2x + 3)(2x - 4). \end{aligned}$$

C'est le même principe qui s'applique avec la règle

$$m a - m b = m(a - b)$$

par exemple

$$\begin{aligned} 2x(x + 1) - 10x &= 2x(x + 1) - 2x \times 5 \\ &= 2x(x + 1 - 5) \\ &= 2x(x - 4). \end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned} (2x + 5)(x + 1) - (2x + 5)(3x - 1) &= (2x + 5)((x + 1) - (3x - 1)) \\ &= (2x + 5)(x + 1 - 3x + 1) \\ &= (2x + 5)(-2x + 2). \end{aligned}$$

Il faut prendre garde dans ce cas à l'effet du signe « moins » précédant une parenthèse, lorsqu'on effectue la réduction dans la dernière parenthèse.

Exercice 3. Factoriser les expressions suivantes.

$$A = (x + 4)(6x - 7) + (3x - 2)(x + 4)$$

$$B = (5x - 1)(3x - 2) - 3x(3x - 2)$$

$$C = (x - 5)^2 + (3x - 1)(x - 5)$$

$$D = (4x - 3)(x - 2) - (4x - 3)^2$$

Avec une identité remarquable.

Différence de deux carrés. L'identité bien connue

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

permet de transformer toute *différence de deux carrés* en un *produit de la somme par la différence* des mêmes termes, pris dans le même ordre. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 - 9 &= (2x + 1)^2 - 3^2 \\ &= ((2x + 1) - 3)((2x + 1) + 3) \\ &= (2x - 2)(2x + 5). \end{aligned}$$

Voici un autre exemple

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 - (3x - 2)^2 &= ((2x + 1) - (3x - 2))((2x + 1) + (3x - 2)) \\ &= (2x + 1 - 3x + 2)(2x + 1 + 3x - 2) \\ &= (3 - x)(5x - 1). \end{aligned}$$

Il est important de procéder avec méthode, en ne négligeant pas de conserver les *parenthèses* pour effectuer la réduction en deux temps !

Carré d'une somme, d'une différence. Il est bien connu que l'on a

$$a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = (a + b)^2$$

ce qui permet de factoriser certaines expressions, comme

$$100x^2 + 20x + 1 = (10x)^2 + 2 \times 10x \times 1 + 1^2 = (10x + 1)^2.$$

On connaît aussi l'identité

$$a^2 - 2 \times a \times b + b^2 = (a - b)^2$$

qui permet par exemple de factoriser

$$4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = (2x - 5)^2.$$

Exercice 4. Factoriser les expressions suivantes.

$$A = (x - 7)^2 - 16$$

$$B = x^2 - 14x + 49$$

$$C = 100 - 9x^2$$

$$D = 36x^2 + 36x + 9$$

$$E = (3x + 1)^2 - (5 - 4x)^2.$$

Application à certaines équations. L'équation

$$(16) \quad (3x - 10)^2 - 25x^2 = 0$$

est résolue en factorisant le premier membre, comme une différence de deux carrés

$$(3x - 10)^2 - (5x)^2 = 0$$

$$((3x - 10) - 5x)((3x - 10) + 5x) = 0$$

$$(-2x - 10)(8x + 10) = 0.$$

C'est maintenant une équation du type *produit-nul*, dont les solutions sont données par l'alternative

$$-2x - 10 = 0 \quad \text{ou} \quad 8x + 10 = 0$$

c'est-à-dire $x = -5$ ou bien $x = -5/4$.

L'équation

$$(17) \quad 25x^2 + 20x + 4 = 0$$

est résolue en factorisant le premier membre

$$(5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2 = 0$$

$$(5x + 2)^2 = 0$$

ce qui est une équation du type *produit-nul* en quelque sorte. La seule possibilité est donnée ici par $5x + 2 = 0$, c'est-à-dire $x = -0,4$.

L'équation

$$(18) \quad 4x^2 - 40x + 100 = 0$$

est résolue en factorisant le premier membre

$$(2x)^2 - 2 \times 2x \times 10 + 10^2 = 0$$

$$(2x - 10)^2 = 0$$

La seule possibilité est $2x - 10 = 0$, c'est-à-dire $x = 5$.

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes en factorisant le membre de gauche.

$$(19) \quad (x + 3)(2x - 7) + (x + 3)(3x + 4) = 0$$

$$(20) \quad (3x - 10)(2x + 3) + 5(2x + 3)(x + 1) = 0$$

$$(21) \quad (4x - 3)^2 - (4x - 3)(2x - 5) = 0$$

$$(22) \quad (6x + 5)^2 - (4x - 3)^2 = 0$$

$$(23) \quad 4x^2 - 25 = 0$$

4. Second degré - un bref aperçu. Voici un procédé permettant de résoudre des équations du second degré lorsqu'on ne peut trouver immédiatement de factorisation par facteur commun ou par identité remarquable.

Considérons l'équation

$$(24) \quad x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Observons que le début du membre de gauche peut s'écrire

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4.$$

C'est une simple manipulation dans l'identité du développement du carré d'une somme. On en déduit que

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1.$$

Donc l'équation (24) est équivalente à

$$(x + 2)^2 - 1 = 0.$$

Or, celle-ci peut se factoriser en reconnaissant une différence de deux carrés

$$\begin{aligned} ((x + 2) - 1)((x + 2) + 1) &= 0 \\ (x + 1)(x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

dont les solutions sont données par $x = -1$ et $x = -3$.

Exercice 6. 1. En écrivant $x^2 - 6x = (x - \dots)^2 - \dots$, résoudre l'équation

$$(25) \quad x^2 - 6x + 5 = 0.$$

2. En écrivant $x^2 + 10x = (x + \dots)^2 - \dots$, résoudre l'équation

$$(26) \quad x^2 + 10x - 39 = 0.$$

3. En écrivant $x^2 + 2x = (x + \dots)^2 - \dots$, résoudre l'équation

$$(27) \quad x^2 + 2x + 2 = 0.$$