Une méthode d'Euler pour l'équation diophantienne du premier degré

Z, auctore

3 février 2006

Résumé

Pour trouver les solutions x, y en **nombres entiers** à l'équation

$$ax + by = c$$

avec a, b premiers entre eux, Euler a proposé[1] une démarche originale.

1 Description de la méthode

Considérons par exemple l'équation

$$39x + 14y = 10. \tag{1}$$

Condition nécessaire Supposons que x, y soit une solution en nombres entiers de cette équation. Alors on peut exprimer y en fonction de x pour obtenir

$$y = \frac{10 - 39x}{14}$$

c'est-à-dire, avec $39 = 2 \times 14 + 11$

$$y = \frac{10 - 11x}{14} - 2x \tag{2}$$

Du fait que x et y sont des nombres entiers, la quantité

$$p = \frac{10 - 11x}{14}$$

est aussi un nombre entier. On obtient donc, d'une part

$$y = p - 2x \tag{3}$$

[1] *Algèbre* (1770), tome second, chap. 1

et d'autre part, x et p sont tels que

$$14p + 11x = 10. \tag{4}$$

Ceci est une équation diophantienne du premier degré dont les coefficients sont globalement moindres que ceux de l'équation initiale.

On exprime alors x en fonction de p ; on obtient

$$x = \frac{10 - 14p}{11} = \frac{10 - 3p}{11} - p \tag{5}$$

La quantité

$$q = \frac{10 - 3p}{11}$$

est un nombre entier ; on a donc

$$x = q - p \tag{6}$$

où q et p sont solutions de l'équation diophantienne

$$11q + 3p = 10. \tag{7}$$

Exprimant p en fonction de q, on obtient

$$p = \frac{10 - 11q}{3} = \frac{1 - 2q}{3} + 3 - 3q. \tag{8}$$

La quantité

$$r = \frac{1 - 2q}{3}$$

est un nombre entier ; ceci permet d'écrire

$$p = r + 3 - 3q \tag{9}$$

où q et r sont solutions de l'équation diophantienne

$$3r + 2q = 1. \tag{10}$$

On exprime alors q en fonction de r ; ainsi

$$q = \frac{1 - 3r}{2} = \frac{1 - r}{2} - r \tag{11}$$

et en posant

$$s = \frac{1 - r}{2}$$

qui est un nombre entier, on obtient

$$q = s - r \tag{12}$$

avec r et s liés par

$$2s + r = 1 \tag{13}$$

c'est-à-dire que l'on a

$$r = 1 - 2s. \tag{14}$$

On peut maintenant *remonter* cette suite de calculs.
On injecte l'expression de r en fonction de s donnée par (14) dans l'égalité (12), ce qui donne

$$q = s - (1 - 2s) = 3s - 1. \tag{15}$$

On peut donc remplacer r et q dans (9) par leurs expressions en fonction de s pour obtenir l'expression de p en fonction de s

$$p = (1 - 2s) + 3 - 3(3s - 1) = 7 - 11s \tag{16}$$

et on peut ensuite remplacer p et q dans (6) pour obtenir l'expression de x en fonction de s

$$x = (3s - 1) - (7 - 11s) = \boxed{14s - 8} \tag{17}$$

Il reste alors à introduire cette expression ainsi que celle de p dans (2) pour obtenir

$$y = (7 - 11s) - 2(14s - 8) = \boxed{-39s + 23} \tag{18}$$

On a donc obtenu les expressions **nécessaires** des solutions x et y de l'équation (1), s'il en existe, en fonction d'un paramètre entier s.

Condition suffisante Il suffit de vérifier qu'avec les expressions (17) et (18) on forme effectivement des solutions à l'équation (1). Or, on a

$$39 \times (14s - 8) + 14 \times (-39s + 23) = -312 + 322 = 10.$$

Ceci montre que les solutions de l'équation diophantienne (1) sont exactement les nombres entiers de la forme

$$x = 14s - 8 \qquad \text{et} \qquad y = -39s + 23 \tag{19}$$

pour tout s entier relatif.

2 Application pratique de la méthode

Concernant l'équation[2] diophantienne

$$8x + 5y = 81 \tag{20}$$

voici une mise en œuvre plus rapide de ce procédé.

On commence avec

$$y = \frac{81 - 8x}{5} = \frac{1 - 3x}{5} + 16 - x.$$

Avec $p = \dfrac{1 - 3x}{5}$, on a

$$y = p + 16 - x, \qquad 5p + 3x = 1. \tag{21}$$

On exprime

$$x = \frac{1 - 5p}{3} = \frac{1 - 2p}{3} - p.$$

Avec $q = \dfrac{1 - 2p}{3}$, on a

$$x = q - p, \qquad 3q + 2p = 1 \tag{22}$$

On exprime

$$p = \frac{1 - 3q}{2} = \frac{1 - q}{2} - q.$$

Avec $r = \dfrac{1 - q}{2}$, on a

$$p = r - q, \qquad 2r + q = 1. \tag{23}$$

Ainsi on a

$$q = 1 - 2r.$$

Alors, il vient

$$p = 1 - (1 - 2r) = 3r - 1.$$

Ensuite

$$x = (1 - 2r) - (3r - 1) = \boxed{2 - 5r} \tag{24}$$

Enfin

$$y = (3r - 1) + 16 - (2 - 5r) = \boxed{13 + 8r} \tag{25}$$

On vérifie que

$$8 \times (2 - 5r) + 5 \times (13 + 8r) = 16 + 65 = 81.$$

Donc les solutions de l'équation (20) sont exactement données par

$$\boxed{x = 2 - 5r, \; y = 13 + 8r \quad (r \text{ entier relatif})}$$

[2] d'après *Continued fractions*, Olds (1963)

Application. De façon schématique, la méthode d'Euler pour résoudre une équation diophantienne consiste

– d'abord à exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre,

– puis à former une nouvelle équation diophantienne, dont les coefficients sont globalement inférieurs (en valeur absolue) à ceux de l'équation initiale. L'inconnue à exprimer est *celle dont le coefficient a la plus petite valeur absolue*, le procédé devant être répété un certain nombre de fois.

Résoudre par cette méthode les équations diophantiennes suivantes

$$18x - 7y = 5 \tag{26}$$

$$39x + 25y = 12 \tag{27}$$

$$20x + 28y = 100. \tag{28}$$