

Sélection FESIC  
Admission en 1ère année du 1er cycle 2007  
Correction

**Exercice 1**

- a) V  
b) F  
c) V  
d) F

a)  $h$  est l'homothétie de centre  $A$  et de rapport 2

$$h : M(z) \rightarrow M'(z')$$

$$\text{alors } z' - z_A = 2(z - z_A)$$

$$\Leftrightarrow z' = 2z - 2i + i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z' = 2z - i}$$

b)  $t$  la translation de vecteur  $\vec{v}$  avec  $z_{\vec{v}} = i$

$$t_{\vec{v}} : M(z) \rightarrow M'(z')$$

$$\text{alors } \boxed{z' = z + i}$$

c)  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

$$r : M(z) \rightarrow M'(z')$$

$$\text{alors } z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$$

$$\text{donc } \frac{z' - z_A}{z - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' - z_A}{z - z_A} = i$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM'}{AM} = \left| \frac{z' - z_A}{z - z_A} \right| = |i| = 1$$

$$\text{donc } \boxed{AM' = AM}$$

d)  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

$$r : B(z) \rightarrow B'(z')$$

$$\text{alors } z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$$

$$\Leftrightarrow z' = i(4 - 3i - i) + i$$

$$\Leftrightarrow z' = 4i + 4 + i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z' = 5i + 4}$$

**Exercice 2**

- a) V  
b) F  
c) V  
d) V

$$a) a = -\sqrt{5} + i\sqrt{15}$$

$$\text{On a } |z| = 2\sqrt{5}$$

Soit  $\theta = \arg(a)$  est tel que

$$\cos(\theta) = \frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc } \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

formule de cours  $\arg(z^n) = n \arg(z)$

donc un argument de  $a^n$  est  $\frac{2n\pi}{3}$

b) si  $O$  appartient à la médiatrice de  $[AB]$  on aurait

$$OA = OB$$

alors

$$\frac{OA}{OB} = 1$$

or

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{-\sqrt{5} + i\sqrt{15}}{2\sqrt{3} + 2i} \right| = \left| \frac{i\sqrt{5}}{2} \right| \neq 1$$

$\hookrightarrow$  contradiction

$$c) (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = \arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg\left(\frac{i\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

donc  $OAB$  rectangle en  $O$

d) Calcul de la distance  $AB$

on sait que le triangle  $OAB$  est rectangle

$$\text{donc } AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$AB^2 = (-\sqrt{5})^2 + (\sqrt{15})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 36$$

$$AB = 6$$

Le cercle circonscrit à  $OAB$  a pour diamètre 6 donc pour rayon 3.

### Exercice 3

a) F

b) F

c) V

d) F

$$a) |z - 2i| = |z - 1|$$

$$\Leftrightarrow |z - z_B| = |z - z_A|$$

$$\Leftrightarrow BM = AM$$

$(E)$  est la médiatrice de  $[BA]$

$$\text{b) } \arg\left(\frac{z-2i}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

on a  $ABM$  rectangle en  $M$

$(F)$  décrit un demi cercle privé de  $A$  et  $B$

l'angle est orienté

$$\text{c) } AC^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

et

$$BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$AB^2 = AB^2 + BC^2 = 5$$

d'où  $C$  appartient à  $(F)$

de plus

$$|z_c - 2i| = \left| -\frac{1}{2} - i\frac{3}{2} \right|$$

$$|z_c - 1| = \left| \frac{-3}{2} + \frac{1}{2} \right|$$

$$\text{donc } |z_c - 2i| = |z_c - 1|$$

d) Si le rapport vaut  $-i$  l'argument vaut  $\frac{-\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow$  contradiction

#### Exercice 4

a) F

b) V

c) V

d) F

a) En considérant les variations des courbes on en conclue que c'est faux.

La courbe  $\mathcal{C}$  coupe l'axe des abscisses pour  $x = 1$ .

On remarque que  $\Gamma$  atteint son minimum pour cette même abscisse.

C'est donc  $\Gamma$  qui est la représentation de  $F$  et  $\mathcal{C}$  celle de  $f$ .

b) Question de cours.

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ;  $a \in I$  et  $b \in I$ . On a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Ici  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$  et  $F(0) = 0$  donc on a  $\int_0^x f(t)dt = F(x)$ .

c) Sur le graphique on lit  $F(\sqrt{e}) = 0$  or

$$F(\sqrt{e}) = \int_0^{\sqrt{e}} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{\sqrt{e}} f(t)dt = F(1) + F(\sqrt{e}) - F(1) = F(1) - F(1)$$

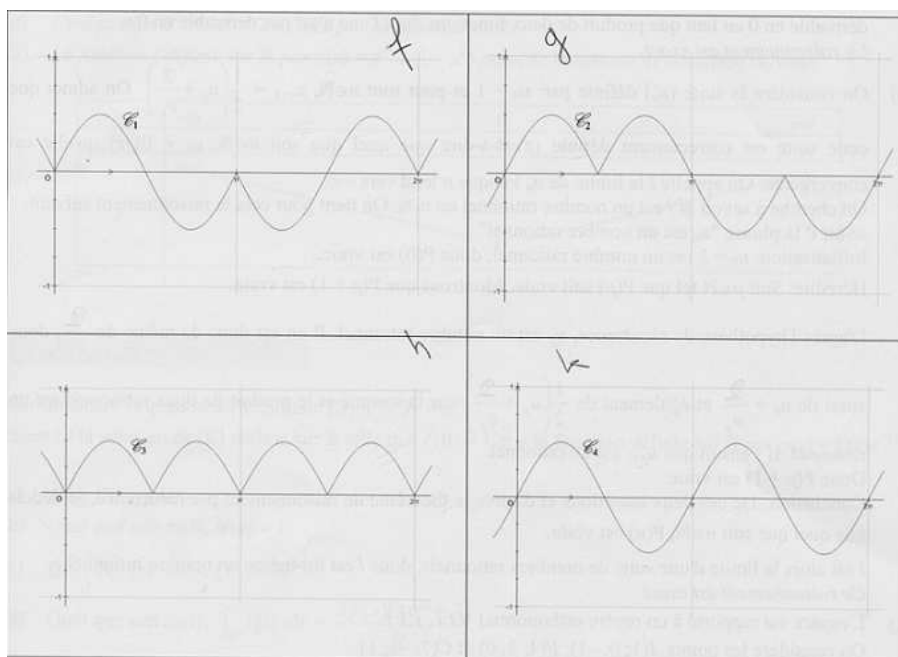
Donc les aires sont égales.

d)  $F$  admet une tangente horizontale en  $0$  et est continue en ce point, donc  $F$  est dérivable au moins une fois en  $0$ .

$f$  présentant une tangente verticale en  $0$  et  $y$  étant décroissante, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ . Donc  $f$  n'est pas dérivable en  $0$  par définition : la limite du taux d'accroissement en  $0$  n'admet pas de limite finie.

On en déduit donc que  $F$  n'est pas deux fois dérivable en  $0$ .

### Exercice 5



- a) F.
- b) V.
- c) F.
- d) F.

a) Plaçons-nous en  $x = \frac{\pi}{2}$ , donc on aura  $f(x) = g(x - \frac{\pi}{2}) = 0$ . En regardant les courbes on remarque que si on augmente légèrement  $x$ ,  $f$  décroît alors que  $g$  translaté de  $\frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire à l'origine, croît, lui. Ce qui montre que c'est effectivement faux.

b) Tout ce qui est négatif sur  $\mathcal{C}_4$  devient positif sur  $\mathcal{C}_3$ . On a bien  $h(x) = |k(x)|$ .

c) Effectivement, sur l'intervalle  $]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$  l'égalité n'est pas vérifiée vu que l'on additionnerait 4 valeurs strictement positives. Donc c'est faux.

d) La fonction sinus croît jusqu'en 1 alors que  $k$  ne dépasse pas 0,5. Donc la réponse est clairement négative.

### Exercice 6

- a) F
- b) F
- c) V
- d) F

a) Dans le doute, commençons par regarder si la fonction est dérivable en 0.

Par définition :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = 0$ .

La limite est finie, donc  $f$  est dérivable en 0. L'énoncé est donc forcément faux, vu qu'il affirme le contraire.

b) Là il faut remettre en doute la partie "l est rationnel comme limite de nombres rationnels". Au niveau Bac on ne manipule pas les démonstrations de ce genre, donc il faut se demander si cette affirmation est fautive, vu que l'on ne saurait pas le démontrer.

Effectivement, c'est faux, et il faut exploiter ce que l'on appelle la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour les plus curieux d'entre-vous, cela veut dire que tout nombre réel peut être exprimé comme limite d'une suite de nombres rationnels justement (et la démonstration existe, mais on va s'en passer), ce qui infirmerait la proposition. Fournissons donc ce contre-exemple en trouvant une suite de nombres rationnels qui tendrait vers un nombre réel non rationnel en l'infini.

Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_0 = 1$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n + 1 = v_{n-1} + 10^{-n}$ .

On aura donc  $v_0 = 1$ ;  $v_1 = 1,1$ ;  $v_2 = 1,11$ ; etc. qui sont tous rationnels. Pourtant la suite tend vers 1,1111... (une infinité de 1) qui n'est pas rationnel lui (à partir d'un moment il n'y a pas que des 0). Cela fournit donc un contre-exemple.

c) On se rappelle du produit scalaire qui s'exprime :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos((\vec{AB}; \vec{AC}))$$

Or comme les vecteurs sont non-nuls, ils ne déterminent pas la base d'un plan que si ils sont colinéaires, ce qui entraînerait alors que le cosinus vaut 1 ou -1, et il y aurait l'égalité  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB \cdot AC|$  de vérifiée.

Le cas contraire signifie donc que les vecteurs forment la base d'un plan, et donc que le raisonnement de l'énoncé est correct. On répond donc vrai.

d) Si on considère la limite à gauche de 0 qui vaut  $-1$  (le sinus est strictement négatif, donc  $x$  aussi) et la limite à droite qui vaut 1 (cette fois le sinus est positif), on se rend compte qu'elles ne sont pas égales. Donc malgré le fait que  $E(0) = 0$ , la notion de limite, elle, n'a pas de sens.

Il faut par conséquent encore parler de limites à gauche et à droite vu qu'elles sont différentes.

### Exercice 7

- a) F
- b) V
- c) V

d) F

a) On va exploiter la limite d'une somme.

Déjà  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ , c'est une limite de cours.

Puis on remarque que  $\frac{-2 \ln(x)}{x^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}$ .

Effectuons le changement de variables  $X = \frac{1}{x^2}$ . Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \ln(x)}{x^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X \ln(X) = +\infty$$

Par somme de limites, on en déduit que la limite de la fonction de l'énoncé est  $+\infty$  en 0 et non 1.

b) Pour tout  $x \geq 1$ ,  $\frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{\ln(x)}{e^x} \geq 0$ .

Or  $\frac{\ln(x)}{x}$  tend vers 0 en  $+\infty$ , donc par théorème de comparaison la limite de  $\frac{\ln(x)}{e^x}$  est nulle en  $+\infty$ .

c) Les 3 termes sont strictement positifs, donc c'est vrai, l'équation n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

d) Pour tout  $x \geq 1$ ,  $\frac{1+x^2}{e^x} \geq \frac{\ln(1+x^2)}{e^x} \geq 0$ . Et comme  $\frac{1+x^2}{e^x}$  tend vers 0 vu que l'exponentielle l'emporte en l'infini, on en déduit que le tableau n'est pas bon.

Une justification s'impose quand même. J'ai affirmé que pour tout  $x \geq 1$ ,  $1+x^2 \geq \ln(1+x^2)$ . Ben ça vient du changement de variable  $u = 1+x^2$  dans l'inégalité de cours  $u \geq \ln(u)$  les plus pointilleux remarquerons que mon changement de variable est valable sur l'intervalle considéré, donc tout va bien.

### Exercice 8

a) V

b) V

c) F

d) V

a)  $f$  est solution de  $[E]$ , donc pour tout  $x$ ,  $f'(x) - 3f(x) = e^{3x}$ .

Pour  $x = 0$ , comme  $f(0) = 1$ , on en déduit bien que  $f'(0) = 4$ .

b) Déjà,  $g$  est bien dérivable comme produit de fonctions dérivables.

$$g'(x) = (f'(x) - 3f(x)) \times e^{-3x} \Rightarrow \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">} g'(0) = (4 - 3 \times 1) \times 1 = 1 \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">}$$

c)  $f(0) = 1$ , alors que }  $x \times e^{3x} = 0$  en 0}, donc ce n'est pas vrai.

d) Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = \frac{3f(x) - e^{3x} - 2}{9}$ .

$$h'(x) = \frac{f'(x) - e^{3x}}{3} = f(x) \text{ car } f \text{ est solution de } [E] \text{ (} f'(x) - 3f(x) = e^{3x} \text{)}.$$

Donc  $h$  est une primitive de  $f$ . Et comme  $h(0) = 0$ , c'est la primitive de  $f$  qui s'annule en 0. Donc elle est bien définie par : 
$$h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

### Exercice 9

- a) V  
b) F  
c) V  
d) V

a) Une intégration par partie nous montre que (avec  $u(x) = \ln(x)$  et  $v'(x) = \frac{1}{x}$ ) :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = [\ln^2(x)]_1^e - \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = 1 - I_1$$

Donc 
$$I_1 = \frac{1}{2}.$$

9.b)  $\forall x \in [1; e], \forall n \geq 1, x^{n+1} > x^n.$

Par conséquent  $\frac{\ln(x)}{x^{n+1}} < \frac{\ln(x)}{x^n}$  pour  $x \in ]1; e[$ .

D'où  $I_{n+1} < I_n$ . La suite est donc décroissante.

9.c) Comme  $\frac{\ln(x)}{x^n}$  est supérieur à 0 sur  $[1; e]$ , l'intégrale l'est. La première partie de l'inégalité est bien vérifiée.

Pour l'autre partie, on va commencer l'intégration par partie qui sera détaillée dans la question suivante :

$$I_n = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^n} dx = \left[ \frac{-\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{(n-1)x^n} dx$$

$$I_n = \frac{-1}{(n-1)e^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int_1^e \frac{1}{x^n} dx$$

Or on sait que  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x^n}$  sur l'intervalle demandé. Donc il vient que :

$$\int_1^e \frac{1}{x^n} dx \leq \int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$$

D'où :

$$I_n \leq \frac{-1}{(n-1)e^{n-1}} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \left( 1 - \frac{1}{e^{n-1}} \right)$$

9.d) On intègre par partie. Comme  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} & u'(x) &= \frac{1}{x^n} \\ v(x) &= \ln(x) & v'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$I_n = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^n} dx = \left[ \frac{-\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{(n-1)x^n} dx$$

$$I_n = \frac{-1}{(n-1)e^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2} \left[ \frac{1}{x^{n-1}} \right]_1^e$$

$$I_n = -\frac{e^{1-n}}{n-1} - \frac{e^{1-n} - 1}{(n-1)^2}$$

$$I_n = \frac{1 - ne^{1-n}}{(n-1)^2}$$

**Exercice 10**

- a) V  
b) V  
c) V  
d) V

$$a) w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{1}{5}(v_n - u_n) = \frac{1}{5}w_n$$

$$(w_n) \text{ est bien géométrique de raison } \frac{1}{5}.$$

$$b) u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \frac{-2u_n + 2v_n}{5} = \frac{2}{5}w_n$$

Or, comme  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{5}$  et que  $w_0 = 5$ , on en déduit que  $w_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ , donc que  $w_n$  est positive pour tout  $n$ .

Par conséquent  $u_{n+1} - u_n$  est positif.  $\boxed{\text{D'où } (u_n) \text{ est croissante}}$ .

$$c) \text{ De même : } v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n + 3v_n}{5} - v_n = \frac{2u_n - 2v_n}{5} = -\frac{2}{5}w_n$$

Donc  $(v_n)$  est décroissante.

Comme  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{5}$  inférieure à 1, alors elle converge vers 0.

Il vient donc que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes,  $\boxed{\text{donc elles convergent}}$ .

d) On a déjà vu que  $(u_n)$  est croissante, donc  $u_{n+1} \geq u_n$ .

$$\text{De plus } u_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \frac{3u_n - 3v_n}{5} = -\frac{3}{5}w_n$$

Donc  $u_{n+1} \leq v_n$ .

$\boxed{\text{D'où l'encadrement de l'énoncé}}$ .

**Exercice 11**

- a) V  
b) V  
c) V  
d) V

a) Un petit raisonnement par récurrence fournit le résultat proposé :

Soit la propriété  $P(n)$  : «  $1 < u_n < 2$  »,  $n \in \mathbb{N}$ .

►  $n = 0$  :  $1 < u_0 = 1, 5 < 2$ , donc  $P(0)$  est vraie.

► Soit  $P(n)$  vraie pour un  $n$  donné :  $1 < u_n < 2 \Rightarrow 1 < \frac{-2}{u_n - 3} = u_{n+1} < 2$

Donc  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ .

Le principe de récurrence étant vérifié, il faut répondre vrai à cet item.

$$b) u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{u_n - 3} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n - 3} = -\frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n - 3}$$

D'après l'encadrement de la question précédente, on peut alors affirmer que  $u_{n+1} - u_n$  est négatif. ( $u_n$ ) étant décroissante et minorée, elle converge.

c) Déjà un calcul immédiat fournit  $v_0 = -1$ .

$$\text{Puis } v_{n+1} = \frac{\frac{-2}{u_n - 3} - 2}{\frac{-2}{u_n - 3} - 1} = \frac{-2 - 2(u_n - 3)}{-2 - (u_n - 3)} = 2\frac{u_n - 2}{u_n - 1} = 2v_n.$$

$(v_n)$  est bien géométrique de raison 2 et de premier terme  $-1$ .

$$d) \text{ On a donc } v_n = -2^n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

$$\text{On mélange, ce qui nous donne } u_n = \frac{2 + 2^n}{1 + 2^n}.$$

En remarquant au numérateur que  $2 + 2^n = 1 + (1 + 2^n)$ , on peut donc écrire l'expression sous la forme de l'énoncé.

## Exercice 12

- a) F  
b) F  
c) V  
d) F

a) Sans réfléchir, on dérive, puis on regarde ce qu'il se passe quand  $x$  tend vers 0.

$$f'_n(x) = [(n-1)\ln(x) + 1]x^{n-2}$$

Si  $n = 2$ , comme par hasard  $f'_n$  tend vers moins l'infini vu que la puissance de  $x$  disparaît, mais pour  $n \geq 3$ , on se retrouve avec du  $x \times \ln(x)$  qui tend vers 0 en 0.

Donc comme pour  $n \geq 3$  l'asymptote est horizontale.

b) Comme le seul facteur dépendant de  $n$  est  $x^{n-1}$ , on peut considérer  $\ln(x)$  comme une constante, alors on ne s'en occupe pas.

Sur  $]0; 1[$ , comme  $x^{n-1}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors  $f$  aussi tend vers 0.

c) Pour comparer les tangentes en 1 il suffit de connaître  $f_n(1)$  et  $f'_n(1)$ .

Or pour tout  $n \geq 3$  (bizarre de commencer en 3 cette fois-ci vu que ça revient au même si  $n = 2$ ), on a  $f_n(1) = 0$  et  $f'_n(1) = 1$ . Donc les tangentes sont bien identiques.

d) Soit on reconnaît (une fois le  $\ln(x)$  mis en facteur de la somme) la somme des termes d'une suite géométrique, et là je dis attention vu que  $k$  commence à 2, soit on considère le cas  $n = 2$  parce que l'on n'a pas le temps dans un QCM de se tromper en faisant des changements d'indice foireux et que de toutes les manières le résultat est manifestement faux puisque la formule ne tient pas compte du fait que  $k$  commence à 2.

$$\text{Donc si } n = 2, \left( \sum_{k=2}^{k=2} x^{k-1} = x \right) \neq \left( \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x \right).$$

**Exercice 13**

- a) V  
 b) F  
 c) V  
 d) V

a) On tire les boules avec remise. Le tirage de la seconde boule noire est donc indépendant du tirage de la première. On peut toujours raisonner à l'aide d'un arbre pour s'en convaincre mais c'est plus long .

Donc,

$$p_{U_1}(N) = \frac{n}{2n} \times \frac{n}{2n} = \frac{1}{4}$$

et

$$p(U_1 \cap N) = p(U_1) \times p_{U_1}(N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$p(U_1 \cap N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$\boxed{p(U_1 \cap N) = \frac{1}{8}}$$

$$b) p_{U_2}(N) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}}$$

$$p_{U_2}(N) = \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1}$$

$$\boxed{p_{U_2}(N) = \frac{n-1}{4n-2}}$$

c) La limite commune est  $\frac{1}{4}$ .

d) Formule des probabilités totales :

$$p(N) = p(U_1) \times p_{U_1}(N) + p(U_2) \times p_{U_2}(N)$$

soit

$$p(N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

$$p(N) = \frac{2n-1+2n-2}{8(2n-2)}$$

$$\boxed{p(N) = \frac{4n-3}{8(2n-1)}}$$

**Exercice 14**

- a) V  
 b) F  
 c) V  
 d) V

$$a) P(T \leq 1) = \int_0^1 f_\lambda(t) dt = 1 - e^{-\lambda}$$

Or  $P(T \leq 1) = \frac{1}{2}$ ; donc on résoud l'équation :

$$1 - e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$$

On trouve  $\lambda = \ln 2$ .

Pour la suite : soit  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de machines tombées en panne. Comme les utilisations des machines sont répétées et indépendantes (remarque : la loi de probabilité exponentielle n'a pas de mémoire),  $X$  suit une loi binomiale dont la probabilité de succès vaut  $\frac{1}{2}$  (et celle d'échec  $\frac{1}{2}$  aussi).

b) Faux, ça tombe sous le sens, 1 étant la probabilité de l'évènement certain ! Voici toutefois le calcul à effectuer :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - \frac{1}{2^2}$$

$$P(X \geq 1) = \frac{3}{4}$$

$$c) P(X = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(X = 1) = \frac{5}{32}$$

$$d) P(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

### Exercice 15

- a) V
- b) F
- c) V
- d) V

a) Tous les vecteurs normaux à  $(Q)$  sont colinéaires entre-eux, donc on regarde si  $(8; -1; -5)$  est colinéaire à  $\vec{AC}$ .

Or  $\vec{AC} = (8; -1; -5)$  donc c'est vrai.

b) Il y a pleins de méthodes possibles. Comme il faut bien en choisir une, on va par exemple regarder si le milieu  $I$  de  $[AB]$  de coordonnées  $\left(\frac{-1}{2}; 0; \frac{7}{2}\right)$  appartient au plan.

$\left(\frac{-1}{2}\right) + 4 \times (0) + \left(\frac{7}{2}\right) + 4 \neq 0$ , donc les coordonnées de  $I$  ne vérifie pas l'équation de plan donnée.

Comme  $I$  appartient à  $(P)$ , ça signifie que l'affirmation est fausse .

c) On va calculer les longueurs  $\Omega A$ ,  $\Omega B$ ,  $\Omega C$  et  $\Omega D$  afin de savoir si elles sont égales vu que  $\Omega$  est supposé être le centre de la sphère.

On remarque que  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = 9$ , donc  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à la même sphère de centre  $\Omega$ .

d) Alors là sans démonstration regardez comment on règle cette question durant un QCM sans justifications, ensuite je fais le truc fastidieux.

$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{BM} \Rightarrow AMB$  est un triangle rectangle en  $M$  ou  $M = A$  ou  $M = B$ .

On en conclut donc intuitivement que l'ensemble recherché est bien une sphère, vu que les  $M$  appartiennent à un cercle de diamètre  $AB$  dans l'espace.

Bon maintenant la démonstration embêtante : on se ramène à une équation de sphère. Soit  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$ .

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = (x+1)x + (y-2)(y+2) + (z-4)(z-3)$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = x^2 + x + y^2 - 2^2 + z^2 - 7z + 12$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 - 4$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Et comme le produit scalaire est nul on en déduit que les coordonnées de  $M$  vérifient :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

C'est l'équation de la sphère de centre  $I$  le milieu de  $[AB]$  (cf. la question b)).

### Exercice 16

- a) F  
b) V  
c) F  
d) V

a) Une équation de plan est de la forme  $ax + by + cz + d = 0$ . Donc l'équation telle que  $a = b = 1$  et  $c = d = 0$ , c'est-à-dire  $x + y = 0$ , est une équation de plan. On en conclut que  $(P)$  est un plan est non une droite.

b) En reprenant l'équation de tout à l'heure, on sait que le vecteur  $(a; b; c)$  est normal au plan.

Soient  $\vec{p}(1; 1; 0)$  et  $\vec{r}(0; 0; 1)$  des vecteurs normaux respectivement à  $(P)$  et  $(R)$ .

Il est clair qu'ils ne sont pas colinéaires à cause des 0, donc les plans  $(P)$  et  $(R)$  ne sont pas parallèles.

Leur intersection est par conséquent une droite.

c) Soit  $\vec{q}(2; -1; -1)$  un vecteur normal à  $(Q)$ .

$\vec{p} \cdot \vec{q} = 1 \neq 0$ , donc les plans  $(P)$  et  $(Q)$  ne sont pas perpendiculaires.

d) Les coordonnées de  $A$  vérifient les équations de chacun des 3 plans, donc  $A$  appartient aux 3 plans.