Calculer avec des fractions

Z, auctore

14 mars 2006

Résumé

Dans ce document, on présente les règles de calcul avec les fractions qu'un élève de **4^e^** doit avoir acquises pendant l'année. Dans chaque section, on trouvera systématiquement

- d'abord un bref **rappel de leçon**,
- ensuite des **exemples-types** à étudier attentivement,
- et enfin des **exercices de calcul** à faire en application.

Ponctuellement, la réponse sera donnée sans détail de calcul.

1 Simplification et amplification

1.1 Égalité

Deux quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égaux lorsque l'une de ces conditions est remplie

- les produits **en croix** $a \times d$ et $b \times c$ sont égaux ;
- il existe un **même multiplicateur** m entre les numérateurs $a \times m = c$ et les dénominateurs $b \times m = d$;
- les rapports $a \div b$ et $c \div d$ sont égaux.

C'est ainsi que les fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{24}{60}$ sont égales, puisqu'on vérifie que les produits en croix sont égaux

$$2 \times 60 = 120 = 5 \times 24.$$

Par contre, les fractions $\frac{7}{12}$ et $\frac{32}{60}$ ne sont pas égales, puisque l'on a $12 \times 5 = 60$ alors que $7 \times 5 \neq 32$, c'est-à-dire que les numérateurs et les dénominateurs des deux fractions ne sont pas proportionnels.

1.2 Simplification et amplification

Une fraction est constituée d'un ensemble de quotients égaux, par exemple

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{50} = \cdots$$

Lorsqu'on lit de la gauche vers la droite l'égalité

$$\frac{2}{5} = \frac{24}{60}$$

on dit que les termes de la fraction $\frac{2}{5}$ ont été **amplifiés**, en les multipliant tous deux par 12. Inversement, lorsqu'on divise le numérateur et le dénominateur par le même nombre, on obtient une fraction dont les termes sont plus « simples ». C'est le cas lorsqu'on lit l'égalité précédente de la droite vers la gauche : les termes de la fraction $\frac{24}{60}$ ont été **simplifiés**, en les divisant tous les deux par 12.

1.3 Exercices

Les fractions suivantes sont-elles égales ?

$$\frac{3}{8} \text{ et } \frac{36}{96} \qquad \frac{74}{20} \text{ et } \frac{19}{5}$$
$$\frac{65}{76} \text{ et } \frac{5}{6} \qquad \frac{28}{64} \text{ et } \frac{3}{8}$$
$$\frac{35}{63} \text{ et } \frac{20}{36} \qquad \frac{28}{48} \text{ et } \frac{91}{156}$$

Donner la forme simplifiée au maximum (c'est-à-dire **réduite**) de chacune de ces fractions.

2 Somme et différence

On peut ajouter ou soustraire directement des fractions seulement lorsqu'elles ont le **même dénominateur** ; sinon, on doit amplifier les fractions pour les mettre au même dénominateur.

2.1 Exemples

Avec le même dénominateur : les calculs sont directs.

$$A = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \qquad B = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}$$

$$= \frac{5+2}{3} \qquad = \frac{6-2}{5}$$

$$= \boxed{\frac{7}{3}} \qquad = \boxed{\frac{4}{5}}$$

Avec un nombre entier : on sait que $n = \frac{n}{1} = \frac{2 \times n}{2} = \frac{3 \times n}{3} = \cdots$

$$C = 5 + \frac{3}{4} \qquad\qquad D = 6 - \frac{2}{5}$$

$$= \frac{4 \times 5}{4} + \frac{3}{4} \qquad\qquad = \frac{5 \times 6}{5} - \frac{2}{5}$$

$$= \boxed{\frac{23}{4}} \qquad\qquad = \boxed{\frac{28}{5}}$$

Cas général : on doit mettre au même dénominateur.

$$E = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \qquad\qquad F = \frac{5}{8} - \frac{9}{10}$$

$$= \frac{4 \times 3}{5 \times 3} + \frac{2 \times 5}{3 \times 5} \qquad\qquad = \frac{5 \times 10}{8 \times 10} - \frac{9 \times 8}{10 \times 8}$$

$$= \frac{12}{15} + \frac{10}{15} \qquad\qquad = \frac{50}{80} - \frac{72}{80}$$

$$= \boxed{\frac{22}{15}} \qquad\qquad = \frac{-22}{80} = \boxed{\frac{-11}{40}}$$

Remarque. Pour l'exemple F, on aurait pu trouver un meilleur dénominateur commun ; en parcourant les tables de 8 et 10, il est clair que $8 \times 5 = 40 = 4 \times 10$. Ainsi, on peut calculer de la façon suivante

$$F = \frac{5 \times 5}{8 \times 5} - \frac{9 \times 4}{10 \times 4} = \frac{25}{40} - \frac{36}{40} = \frac{25 - 36}{40} = \boxed{\frac{-11}{40}}$$

2.2 Exercices

Effectuer sous forme fractionnaire les calculs suivants.

$$A = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \qquad B = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}$$

$$C = \frac{17}{5} + \frac{7}{5} \qquad D = \frac{30}{11} - \frac{8}{11}$$

$$E = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \qquad F = \frac{3}{5} + \frac{3}{10}$$

$$G = \frac{8}{15} - \frac{2}{3} \qquad H = \frac{5}{6} + \frac{2}{5}$$

$$I = 8 + \frac{3}{6} \qquad J = \frac{3}{14} - \frac{1}{6}$$

Quelques réponses.

$$E = \frac{3}{4}, \qquad G = \frac{-2}{15}, \qquad I = \frac{17}{2}$$

3 Produit et quotient

Deux principes de calcul sont en jeu.

1° La multiplication des fractions s'effectue en multipliant d'une part les numérateurs entre eux, et d'autre part les dénominateurs entre eux.

2° Le principe de la division est de **multiplier par l'inverse** du diviseur ; l'inverse de la fraction $\frac{p}{q}$ est la fraction $\frac{q}{p}$: c'est la fraction renversée.

La règle de multiplication est donc en partie utilisée dans le cas de la division. Ces règles doivent être sues sans la moindre hésitation.

3.1 Exemples

Produit avec un nombre entier : on multiplie seulement le numérateur.

$$J = \frac{2}{3} \times 5 \qquad K = 3 \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{2 \times 5}{3} \qquad = \frac{3 \times 4}{5}$$

$$= \boxed{\frac{10}{3}} \qquad = \boxed{\frac{12}{5}}$$

Produit de deux fractions : le calcul s'effectue « en ligne »

$$L = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \qquad M = \frac{7}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1 \times 4}{3 \times 5} \qquad = \frac{7 \times 3}{5 \times 4}$$

$$= \boxed{\frac{4}{15}} \qquad = \boxed{\frac{21}{20}}$$

Ces deux cas de figure sont très simples ; on essaiera de simplifier les résultats dès que possible.

Quotient avec un nombre entier : on inverse le diviseur.

$$N = \frac{5}{3} \div 2 \qquad O = 3 \div \frac{4}{5}$$

$$= \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} \qquad = 3 \times \frac{5}{4}$$

$$= \frac{5}{3 \times 2} \qquad = \boxed{\frac{15}{4}}$$

$$= \boxed{\frac{5}{6}}$$

Quotient de deux fractions : on inverse la seconde fraction.

$$P = \frac{4}{5} \div \frac{3}{2} \qquad Q = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \qquad = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3}$$

$$= \boxed{\frac{8}{15}} \qquad = \boxed{\frac{20}{21}}$$

Remarque. On s'appuie de façon essentielle sur la propriété suivante

diviser par un nombre revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

3.2 Exercices

Effectuer sous forme fractionnaire les calculs suivants.

$$A = \frac{2}{3} \times 4 \qquad B = \frac{1}{5} \times \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{8}{5} \times \frac{2}{3} \qquad D = \frac{4}{3} \div 2$$

$$E = \frac{5}{4} \div \frac{1}{2} \qquad F = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}$$

$$G = \frac{8}{3} \div \frac{9}{5} \qquad H = 12 \div \frac{5}{3}$$

$$I = \frac{\frac{4}{7}}{3} \qquad J = \frac{5}{\frac{2}{3}}$$

Quelques réponses.

$$B = \frac{3}{10}, \qquad E = \frac{5}{2}, \qquad H = \frac{36}{5}$$

4 Calculs mixtes (avec priorités)

Avertissement. On prendra garde à lire **toute la ligne de calcul**, afin de repérer les priorités
– opérations entre parenthèses, puis dans l'ordre
– produits et quotients ;
– sommes et différences ;
en respectant les différentes règles des signes.

Exercices. Effectuer sous forme fractionnaire les calculs suivants.

$$Q = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \qquad R = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{4}{5} \times 3 - \frac{2}{7} \qquad T = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{5}$$

$$U = \left(3 + \frac{5}{2}\right)\left(5 - \frac{3}{2}\right) \qquad V = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$W = 2 + \frac{1}{5} \div \frac{3}{2} \qquad X = \frac{5}{6} + \frac{4}{3} \div \frac{4}{5}$$

$$Y = \frac{10}{9} - \frac{5}{2} \div \frac{9}{5} \qquad Z = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \div \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \frac{5}{6} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \qquad \beta = \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{7}}{\frac{10}{7} - \frac{1}{2}}$$

Quelques réponses.

$$Q = \frac{5}{6}, \qquad T = \frac{7}{30}, \qquad W = \frac{32}{15}, \qquad Z = \frac{14}{9}$$