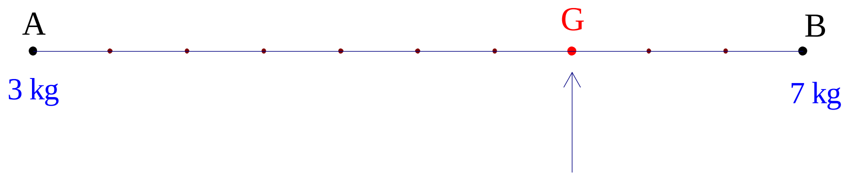
Calcul Barycentrique

Z, auctore

31 octobre 2005

1 Introduction

Deux masses, l'une de 3 kg et l'autre de 7kg, sont fixées aux extrémités d'une barre comme représenté ci-dessous.



Le point d'équilibre G de cette barre est le point où s'équilibrent les forces exercées par ces masses ; celui-ci doit être tel que

$$3\,\overrightarrow{GA} = -7\,\overrightarrow{GB}$$

C'est-à-dire

$$3\,\overrightarrow{GA} + 7\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

ce qui se traduit (après calculs) par

$$\overrightarrow{AG} = \tfrac{7}{10}\,\overrightarrow{AB}.$$

Cette égalité détermine parfaitement la position d'équilibre de la barre.

2 Définitions

Soient $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$ deux points points *pondérés* - c'est-à-dire affectés d'un *coefficient* : a est le coefficient de A, b est celui de B.

Théorème 1 *Si $a+b \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que*

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Définition 1 *Lorsqu'il existe, ce point G unique est appelé* ***barycentre*** *du système de points pondérés $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$.*

Remarque. Lorsque $a+b=0$, il n'est pas possible de définir le barycentre de $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$.

On retiendra, lorsque $a+b \neq 0$

$$\boxed{G = \text{bary}\{(A\,;\,a)\,;\,(B\,;\,b)\} \Leftrightarrow a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$$

Le théorème et la définition s'étendent au cas d'un système de trois points pondérés $(A\,;\,a)$, $(B\,;\,b)$ et $(C\,;\,c)$, lorsque $a+b+c \neq 0$. Dans ce cas, on a l'existence et l'unicité du point G tel que

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

De la même manière, si $a+b+\cdots+n \neq 0$, alors il existe un et un seul point G tel que

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + \cdots + n\,\overrightarrow{GN} = \vec{0}.$$

3 Propriétés

Propriété 1 (Position) *Pour $a+b \neq 0$, G est le barycentre de $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$, si, et seulement si*

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \tfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}}$$

De même, on a

$$\overrightarrow{BG} = \tfrac{a}{a+b}\,\overrightarrow{BA}.$$

Le barycentre de deux points A et B est donc aligné avec ceux-ci ; inversement, tout point situé sur la droite (AB) peut être vu comme un barycentre de A et B. Lorsque l'on a $a > 0$ et $b > 0$ alors G est situé sur le segment $[AB]$ (privé de ses extrémités).
La **propriété 1** s'étend au cas d'un nombre fini quelconque de points pondérés dont la somme des coefficients est non-nulle. Dans le cas de trois points, si $a + b + c \neq 0$, alors

$$G = \text{bary}\{(A\,;\,a)\,;\,(B\,;\,b)\,(C\,;\,c)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \tfrac{b}{a+b+c}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{c}{a+b+c}\,\overrightarrow{AC}.$$

Tout barycentre de trois points (non-alignés) est situé dans le plan défini par ceux-ci. La réciproque est vraie. Lorsque l'on a $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, alors G est à l'intérieur du triangle ABC.
La **propriété 1** découle de la *relation de Chasles*, appliquée dans la définition du barycentre.
C'est cette propriété qui permet de construire le barycentre de deux ou trois points.

Propriété 2 (Condensation, réduction) *Pour $a + b \neq 0$, G est le barycentre de $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$, si, et seulement si, pour* ***tout*** *point P, on a*

$$\boxed{a\,\overrightarrow{PA} + b\,\overrightarrow{PB} = (a+b)\,\overrightarrow{PG}}$$

Cette propriété s'étend à plusieurs points : si $a + b + c \neq 0$, le barycentre G de $\{(A\,;\,a)\,;\,(B\,;\,b)\,(C\,;\,c)\}$ est caractérisé par le fait que, pour tout P

$$a\,\overrightarrow{PA} + b\,\overrightarrow{PB} + c\,\overrightarrow{PC} = (a+b+c)\,\overrightarrow{PG}$$

La **propriété 2** est une conséquence de la *relation de Chasles*.
Cette propriété permet de *réduire* certaines sommes vectorielles (voir l' **exemple-type** en fin d'article).

Propriété 3 (Linéarité) *Soit G le barycentre de $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$, avec $a + b \neq 0$. Alors pour tout $k \neq 0$, G est aussi le barycentre de $(A\,;\,a \times k)$ et $(B\,;\,b \times k)$, ou même de $(A\,;\,a \div k)$ et $(B\,;\,b \div k)$.*

Cela signifie que l'*on peut multiplier tous les coefficients (ou les diviser) par un même nombre non-nul sans changer le barycentre.*
Cette propriété s'étend à un nombre fini quelconque de points.

Propriété 4 (Associativité) *Soit G le barycentre de $(A\,;\,a)$, $(B\,;\,b)$ et $(C\,;\,c)$, avec $a + b + c \neq 0$. Si $a + b \neq 0$, alors le barycentre H de $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$ existe et dans ce cas, G est encore le barycentre de $(H\,;\,a + b)$ et $(C\,;\,c)$.*

C'est à dire qu'on peut remplacer quelques points par leur barycentre (partiel), à condition de l'affecter de la somme de leurs coefficients.
Cette propriété s'étend à un nombre fini quelconque de points. Ceci permet de construire le barycentre de plusieurs points.

Cas particulier. Le milieu I d'un segment $[AB]$ est en fait le barycentre de $(A\,;\,1)$ et $(B\,;\,1)$, ou même de $(A\,;\,m)$, $(B\,;\,m)$, pour tout $m \neq 0$. C'est l'*isobarycentre* des points A et B. Cette notion s'étend au cas d'un nombre fini quelconque de points. Dans le cas de trois points A, B et C, on retrouve le centre de gravité du triangle ABC.

Exemple-type.

1. *Trouver tous les points M du plan tels que*

$$\left|\left|\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}\right|\right| = 3.$$

Avec le barycentre G de $(A\,;\,1)$ et $(B\,;\,2)$, on obtient d'après la **propriété 2** (propriété de réduction)

$$\left|\left|3\,\overrightarrow{MG}\right|\right| = 3$$

ce qui définit le cercle de centre G et de rayon 1.

2. *Trouver tous les points M du plan tels que*

$$\left|\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|\right| = \left|\left|4\,\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right|\right|.$$

Avec les barycentres
– G de $(A\,;\,1)$ et $(B\,;\,2)$
– H de $(C\,;\,4)$ et $(D\,;\,-1)$
on peut réduire ceci à l'aide de la **propriété 2**

$$\left|\left|3\overrightarrow{MG}\right|\right| = \left|\left|3\,\overrightarrow{MH}\right|\right|$$

ce qui définit la médiatrice du segment $[GH]$.