

Loi des cosinus (formule d'Al-Kashî) en 1^{re} S

Z, auctore

30 juin 2007

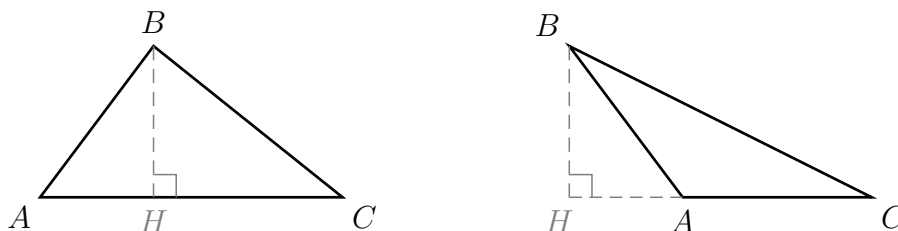
Théorème 1. Dans un triangle ABC , on a les relations :

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2 \times AC \times CB \times \cos \widehat{C}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{B}$$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \times BA \times AC \times \cos \widehat{A}.$$

Ce théorème est valable dans les deux cas de figure ci-dessous :



Corollaire 1. Le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, diminuée du double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle compris entre eux.

Corollaire 2. Avec les notations traditionnelles (angle \widehat{A} opposé au côté a , etc.), les formules de la loi des cosinus s'écrivent

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos \widehat{C}.$$

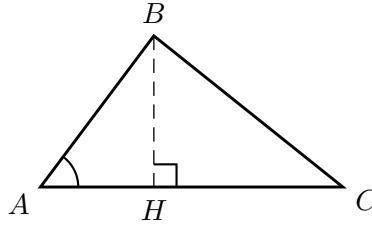
Corollaire 3 (Critère pour reconnaître la nature d'un angle). Dans le triangle ABC , l'angle \widehat{A} est aigu si et seulement si $a^2 < b^2 + c^2$.

Démonstration. En effet, la loi des cosinus montre que

$$a^2 < b^2 + c^2 \iff 2 \times b \times c \times \cos \widehat{A} > 0$$

c'est-à-dire \widehat{A} aigu, comme tout angle dont le cosinus est positif. \square

Démonstration du théorème. Le **premier cas de figure** est celui où l'angle \widehat{A} est aigu.



Pour évaluer le carré de BC , on place le projeté orthogonal H de B sur $[AC]$, de telle sorte que le théorème de Pythagore dans le triangle BHC donne :

$$(1) \quad BC^2 = BH^2 + HC^2.$$

Pour introduire le côté AB , on écrit le théorème de Pythagore dans le triangle BAH :

$$BH^2 = AB^2 - AH^2,$$

d'où en remplaçant dans (1) :

$$(2) \quad BC^2 = AB^2 - AH^2 + HC^2.$$

Pour introduire le côté AC , on écrit :

$$HC^2 = (AC - AH)^2 = AC^2 + AH^2 - 2 \times AC \times AH.$$

d'où en remplaçant dans (2) :

$$(3) \quad \begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - AH^2 + AC^2 + AH^2 - 2 \times AC \times AH \\ &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AH. \end{aligned}$$

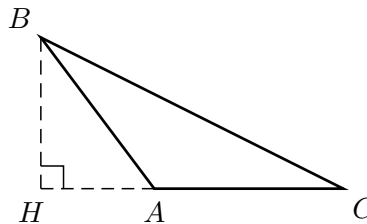
Or, en projetant la longueur AB sur la droite (AC) , on a

$$AH = AB \times \cos \widehat{A},$$

d'où finalement en remplaçant dans (3) :

$$(4) \quad BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \times BA \times AC \times \cos \widehat{A}.$$

Le **second cas de figure** est celui où l'angle \widehat{A} est obtus.



Les seules différences avec le premier cas sont

$$HC^2 = (AC + AH)^2 = AC^2 + AH^2 + 2 \times AC \times AH,$$

ainsi que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \times AC \times AH$$

et

$$AH = AB \times \cos (180 - \widehat{A}) = -AB \times \cos \widehat{A}.$$

La conclusion (4) reste donc la même. □