

Suites arithmétiques

Z, auctore

15 septembre 2005

1 Introduction

La suite des nombres entiers naturels de 1 à n

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$$

est l'exemple-type de suite *arithmétique*. On peut en calculer la somme des termes

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

en remarquant que lorsqu'on écrit les n premiers termes de gauche à droite et de droite à gauche les uns en dessous des autres, leur somme deux-à-deux en colonne est constamment égale à $n + 1$.

$$\begin{array}{cccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ S_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

$$2 \times S_n = n+1 + n+1 + n+1 + \dots + n+1 + n+1 + n+1$$

Alors, on en déduit que

$$2 \times S_n = n \times (n + 1)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}}$$

On peut en déduire la valeur de la somme des n premiers multiples d'un nombre a en factorisant

$$a + 2a + 3a + \dots + na = \frac{n(n + 1)}{2} \times a.$$

2 Définition

De façon générale, une suite $(u_n)_n$ dont les premiers termes sont

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$$

est appelée *suite arithmétique* lorsqu'on passe d'un terme quelconque au terme suivant par addition d'une constante r , c'est-à-dire que l'écart entre deux termes quelconques est constant, ou encore que, pour tout entier n on a la relation

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r est appelé *raison* de la suite $(u_n)_n$.

Par exemple, la suite de nombres

$$u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 7, u_3 = 10, u_4 = 13, \text{ etc.}$$

sont en *progression arithmétique* de raison 3.

Généralement, pour une suite arithmétique (u_n) de raison r , on a

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$$

$$u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r = u_0 + 3r$$

...

$$u_n = u_{n-1} + r = u_{n-2} + 2r = u_{n-3} + 3r = \dots = u_0 + nr$$

On peut se représenter la situation au moyen d'un schéma comme celui-ci

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

3 Propriétés

Avec ce qui précède, on peut énoncer d'importantes propriétés des suites arithmétiques pour leur terme général et la somme de leurs termes consécutifs.

Expression du terme général.

Propriété 1 Pour toute suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r , on a la relation

$$u_n = u_0 + n \times r.$$

Ceci est l'expression du terme général u_n en fonction de n .

Caractérisation. Soient deux nombres p et r . Considérons la suite (U_n) définie pour tout entier n par

$$U_n = p + n \times r.$$

Alors, son premier terme est $U_0 = p$ et cette suite est manifestement arithmétique de raison r . En effet, pour tout n , la différence

$$U_{n+1} - U_n = p + (n+1)r + p - nr = r$$

est constante égale à r . On en déduit donc

Propriété 2 *Les suites arithmétiques sont exactement celles dont le terme général est de la forme*

$$p + n \times r$$

pour tout entier n , avec p et r deux nombres fixés.

Remarques. Cette propriété *caractérise* les suites arithmétiques, en décrivant la forme de leur terme général u_n , qui est fonction affine de l'indice n .

D'un point de vue méthodique, il faut noter que, *pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de montrer que la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de l'indice n .*

Somme des premiers termes. Soit une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r . Considérons alors la somme des termes jusqu'au rang n (on parle parfois de *totalisation* des termes)

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Alors, la propriété 1 permet d'écrire

$$S_n = u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \cdots + u_0 + n \times r$$

c'est-à-dire

$$S_n = (n+1)u_0 + r + 2r + \cdots + n \times r.$$

Avec la formule de la section 1, on obtient

$$S_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times r$$

c'est-à-dire

$$S_n = (n+1) \left(u_0 + \frac{n}{2} \times r \right) = (n+1) \frac{2u_0 + n \times r}{2}$$

On peut aller plus loin en écrivant

$$S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_0 + n \times r}{2} = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Propriété 3 Pour toute suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r , la somme de ses premiers termes est donnée par

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

C'est la somme des $n + 1$ premiers termes, de u_0 à u_n . On peut retenir cette formule en remarquant qu'il s'agit de $(n + 1)$ fois la *moyenne* du premier terme u_0 et du dernier terme u_n .

Nombres en progression arithmétique. Trois nombres a , b et c sont en *progression arithmétique* lorsqu'il existe un nombre r tel que

$$a = b - r \quad \text{et} \quad c = b + r.$$

C'est à dire que a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique dont la raison est r .

Propriété 4 Trois nombres a , b et c sont en *progression arithmétique* si et seulement si l'on a la relation

$$b = \frac{a + c}{2}.$$

Complément. Les propriétés 1 et 3 peuvent être données sous une forme plus générale.

Propriété 5 Soient $n > k$ deux nombres entiers. Alors, on a

$$u_n = u_k + (n - k) \times r$$

et d'autre part

$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = (n - k + 1) \frac{u_k + u_n}{2}.$$

On peut donc atteindre n'importe quel terme à partir d'un terme précédent ; on peut aussi calculer la somme des termes consécutifs pris entre deux termes quelconques d'une suite arithmétique.

4 Applications immédiates

Question 1 Une suite arithmétique (u_n) a pour premier terme $u_0 = 30$ et pour 11^e terme $u_{10} = 70$. Déterminer l'expression du terme général u_n en fonction de n .

Question 2 Calculer le 30^e terme de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 5.

Calculer le 12^e terme d'une suite arithmétique de raison -4 et de premier terme 1.

Question 3 Calculer le premier terme d'une suite arithmétique de raison 3 connaissant son 8^e terme égal à 70.

Question 4 Une suite arithmétique a pour premier terme 20, pour 15^e terme 62. Calculer sa raison.

Question 5 Calculer la somme des 15 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 10 et de raison 3.

Question 6 Le 10^e terme d'une suite arithmétique est 21 et la somme de ces 10 premiers termes est 120. Calculer le premier terme et la raison.

Question 7 Calculer la somme des 1000 premiers nombres entiers.

Calculer la somme des 50 premiers multiples de 3.

Calculer la somme des 100 premiers nombres impairs.

Question 8 Déterminer combien il faut totaliser de termes successifs de la suite arithmétique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{3}$ pour que leur somme soit égale à 48.

Question 9 Calculer trois nombres en progression arithmétique tels que leur somme soit 27 et la somme de leurs **carrés** soit 221.

Question 10 Trouver quatre nombres en progression arithmétique de raison 4 tels que leur **produit** soit égal à 585.