Équations du second degré

Z, auctore

13 septembre 2005

1 Résolution

Dans cette section, on illustre sur un exemple la résolution d'une équation du second degré. Les principes en seront repris dans les cas généraux des sections **2** et **3**. Considérons par exemple l'équation

$$x^2 - 6x + 17 = 0. \tag{1}$$

Le début du polynôme $x^2 - 6x + 17$ rappelle le développement remarquable

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9.$$

On en déduit que

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9.$$

Alors, l'équation (1) devient donc

$$(x-3)^2 - 9 + 17 = 0$$

c'est-à-dire

$$(x-3)^2 - 8 = 0.$$

Avec le fait que $\sqrt{2}^2 = 2$, on écrit ensuite

$$(x-3)^2 - \sqrt{8}^2 = 0$$

et on factorise avec l'identité $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ bien connue

$$\big(x - 3 - \sqrt{8}\big)\big(x - 3 + \sqrt{8}\big) = 0.$$

On a obtenu une équation du type *produit-nul*, dont les solutions sont

$$x = 3 + \sqrt{8} \qquad \text{ou} \qquad x = 3 - \sqrt{8}.$$

Á l'aide des propriétés de la racine carrée, on écrit plutôt $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, d'où la forme définitive des solutions

$$x = 3 + 2\sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad x = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Remarques. On peut condenser l'écriture de ces deux solutions

$$\boxed{x = 3 \pm 2\sqrt{2}}$$

en gardant à l'esprit que l'on désigne ainsi *deux* valeurs, obtenues en changeant le signe devant la racine carrée.
L'astuce de calcul qui consiste à écrire

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$$

est appelée *complément du carré* dans la suite.

2 Formules pour l'équation unitaire

On résout l'équation

$$x^2 + p\,x + q = 0 \tag{2}$$

de la façon suivante. Par **complément du carré**, on a

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0.$$

En mettant au même dénominateur mais en conservant une différence, on a

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = 0.$$

Si la quantité (on l'appelle *discriminant*)

$$p^2 - 4q$$

est **positive** (et seulement dans ce cas), alors on peut prendre la racine carrée du second terme

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 = 0$$

avec la propriété de la racine carrée vis-à-vis du quotient. Grâce à l'identité

$$u^2 - v^2 = (u+v)(u-v),$$

on en déduit que

$$\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)\left(\left(x + \frac{p}{2}\right) - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right) = 0$$

c'est-à-dire
$$\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)=0$$
ou bien encore
$$\left(x-\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x-\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)=0.$$
Les solutions sont donc
$$\boxed{x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}}$$

3 Formules pour l'équation générale

On résout l'équation
$$a\,x^2+b\,x+c=0 \tag{3}$$
avec $a>0$, de la façon suivante. En factorisant par a, obtient
$$a\left(x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}\right)=0.$$
En complétant le carré, on a
$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=0$$
ce qui devient
$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4a\,c}{4a^2}\right)=0.$$
A condition que
$$b^2-4a\,c\geq 0$$
alors on peut prendre la racine carrée du second terme de la parenthèse pour obtenir
$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4a\,c}}{2a}\right)^2\right)=0$$
ce qui devient
$$a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4a\,c}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4a\,c}}{2a}\right)=0$$

c'est-à-dire

$$a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}\right) = 0$$

et les solutions sont donc

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}}$$

4 Factorisation

Dans le cours des démonstrations précédentes, on a vu que l'équation **unitaire** s'écrit sous forme factorisée

$$\boxed{x^2 + p\,x + q = (x - x')(x - x'')}$$

où

$$x' = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad \text{et} \qquad x'' = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

à condition que l'on ait $p^2 - 4q \geq 0$.

D'autre part, on a aussi vu que l'équation **générale** s'écrit sous forme factorisée

$$\boxed{a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

où

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$$

à condition que $b^2 - 4a\,c \geq 0$.

5 Application des formules

La connaissance de ces formules permet d'éviter les étapes de calcul montrées à la section **1**.

Soit l'équation *unitaire* du second degré

$$x^2 - 10x + 3 = 0.$$

On identifie $p = -10$ et $q = 3$ avec les notations de la section **2**. On calcule le discriminant

$$p^2 - 4q = 100 - 12 = 88 > 0$$

et alors on obtient

$$x' = \frac{10 - \sqrt{88}}{2} \qquad \text{ou} \qquad x'' = \frac{10 + \sqrt{88}}{2}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{x' = 5 - \sqrt{22} \quad \text{ou bien} \quad x'' = 5 + \sqrt{22}}$$

et on a aussi la factorisation

$$x^2 - 10x + 3 = \left(x - 5 + \sqrt{22}\right)\left(x - 5 - \sqrt{22}\right).$$

Soit l'équation (non unitaire) du second degré

$$3x^2 - 10x + 6 = 0$$

Alors, on identifie les coefficients $a = 3$, $b = -10$ et $c = 6$ avec les notations de la section **3**. Le discriminant est

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 6 = 28 > 0.$$

On peut donc utiliser les formules quadratiques pour obtenir les solutions

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{2 \times 3}$$

c'est à dire

$$\boxed{x_1 = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}}$$

et on a aussi la factorisation

$$3x^2 - 10x + 6 = 3\left(x - \frac{5 + \sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{5 + \sqrt{7}}{3}\right).$$